

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

Д. Ю. Бирюков

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

Научный редактор проф., д-р техн. наук В.С. Кортов

Екатеринбург
2006

УДК 006.91(075.8)

ББК 30.10е73

Б 64

Рецензенты: зав. каф. "Путь и железнодорожное строительство",
проф., д-р техн. наук Г.Л. Аккерман (УрГУПС);
ст. науч. сотр., канд. хим. наук А.М. Непомилуев
(ИХТТ УрО РАН).

Автор-составитель: Д.Ю. Бирюков

Б 64 **Общая теория измерений. Учебное пособие** / Д.Ю. Бирюков. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. 100 с.

ISBN 5-321-00911-2

Учебное пособие по курсу «Общая теория измерений» рассчитано на студентов специальности 200503 – Стандартизация и сертификация.

В настоящем пособии излагаются основы теории измерений. Изучаются формально-логические обоснования измерения как процесса познания; шкалы измерений; основное уравнение измерений; физические шкалы и неоднозначность образов действительности; методы измерений; системы единиц физических величин; эталоны физических величин и поверочные схемы; математические модели измеряемых величин, средств измерений и погрешностей измерений; методы математической обработки результатов измерений.

Публикуется в рамках плана Уральского НОЦ "Перспективные материалы" (Award No. REC – 005-XI of the U.S. Civilian Research & Development Foundation (CRDF)) - Российско-американская программа поддержки фундаментальных исследований.

Библиогр.: 7 назв. Табл. 3. Рис. 35.

УДК 006.91(075.8)

ББК 30.10е73

ISBN 5-321-00911-5 © ГОУ ВПО «Уральский государственный
технический университет – УПИ», 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПОЗНАНИЯ.....	6
1.1. Формально-логические принципы создания образов	
реального мира	6
1.1.1. Формы познания	6
1.1.2. Объекты познания и их образы.....	6
1.1.3. Формализм познания	8
1.1.4. Основные соотношения характеристик	9
1.1.5. Основные и производные величины.	10
1.1.6. Проблема измеримости и неизмеримости величин. Виды	
шкал.	11
1.1.7. Шкалы цвета	14
1.1.8. Шкала замутненности воды	16
1.1.9. Проблема расширения метрической системы.....	17
1.2. Физические шкалы и неоднозначность образов	
действительности	19
1.2.1. Неоднозначность отображения.....	19
1.2.2. Правила выбора элементов	20
1.2.3. Критерии соответствия отображений.....	20
1.2.4. Неопределенность обратного отображения	21
1.2.5. Способы характеристики неопределенности. Отклонение	
элементов множества	21
1.2.6. Меры множеств.....	23
1.2.7. Виды отклонений. Общий случай.....	24
1.2.8. Интервальные меры	24
1.2.9. Энтропия	27
Итог	28
Контрольные вопросы к разделу 1	28
2. ЭТАЛОНЫ И ИХ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ	30
2.1. Установление эталонов единиц измерения	30
2.2. Воспроизведение эталонов	31
2.2.1. Понятие эталонов и их свойства	31
2.2.2. Одноразовое сравнение	34
2.2.3. n -кратное сравнение с одним и тем же первичным	
эталоном	37
2.2.4. m -кратное сравнение с разными эталонами	38
2.2.5. Вторичный элемент, имеющий m -кратную меру.....	39
2.2.6. Вторичный эталон, имеющий $1/m$ -кратную меру.....	42
2.2.7. Схема иерархии эталонов.....	45

2.3. Образцы материалов.....	47
2.3.1. Подобие характеристик	47
2.3.2. Виды образцов материалов. Качественная категория	48
2.3.3. Количественная характеристика материала. Мера образцов	49
2.3.4. Образцовые газы	50
2.3.5. Образец электролита	50
2.3.6. Определение меры образца на основании пробы.	51
Контрольные вопросы к разделу 2	52
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ.....	53
3.1. Общие принципы моделирования	53
3.2. Моделирование характеристик ИС	57
3.2.1. Статическая модель	58
3.2.2. Динамические модели	61
3.2.3. Модели ИС с дискретным временем	65
3.3. Моделирование источников погрешностей. Вероятностные модели.	70
3.3.1. Нелинейные элементы	74
3.3.2. Нестационарные источники погрешностей	76
3.4. Обобщенная модель погрешностей.....	78
3.4.1. Модель с непрерывным временем	78
3.4.2. Модель с дискретным временем	84
Итог	86
3.5. Идентификация модели измерительной системы	86
3.5.1. Определение независимых переменных модели	87
3.5.2. Корреляционный анализ.....	87
3.5.3. Регрессионный анализ	89
3.5.4. Метод наименьших квадратов	95
3.5.5. Другие методы	96
Контрольные вопросы к разделу 3	97
Библиографический список	99

ВВЕДЕНИЕ

Развитие математической статистики, теории управления и информатики привело к появлению различных интерпретаций задач измерений. Возрастающие сложность и необходимая точность измерительных средств, а также усложняющийся характер задач измерений требуют использования все более эффективных методов анализа и синтеза возникающих проблем. Инструментом в этой области является теория измерений.

Спецификой теории измерений является ее вторичный характер в отношении к исследовательским методам, применяемым в различных науках, особенно в физике. Эффективность и изощренность многих исследовательских методов удивительна. Однако метрология начинается тогда, когда определенная техника исследований находит широкое применение, когда она используется многократно или распространяется на иные области.

Принципы, на которых строится теория измерений, вытекают из цели измерений. Цель любого измерения – это определение состояния наблюдаемого фрагмента действительности, т. е. формирование некоторого объективного образа этой действительности. Теория измерений должна определять способы доказательства истинности и объективности образа действительности, полученного в результате измерений.

В качестве предпосылок теории измерений приняты следующие аксиомы:

- 1) между состояниями данной характеристики и между значениями соответствующих величин существует отношение изоморфности;
- 2) отображение состояния данной характеристики в образ состояния неоднозначно (это — отображение точки в отдельное множество);
- 3) неоднозначность отображения состояния в образ состояния, реализованного с помощью измерительного средства, можно установить на основе математической модели, описывающей метрологические качества этого средства;
- 4) сформированный образ действительности соотносится с некоторыми условно установленными эталонными состояниями (состояниями сравнения).

Эти аксиомы известны и использовались, хотя и не были четко сформулированы.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 200503 – Стандартизация и сертификация и предполагает их знакомство с теорией вероятностей и математической статистикой, а также с метрологией.

1. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПОЗНАНИЯ

1.1. Формально-логические принципы создания образов реального мира

1.1.1. Формы познания

Смысл измерений в различных науках интерпретируется по-разному. В философии измерение рассматривается как инструмент процесса познания. С философской точки зрения теория познания занимается формами поиска и получения информации об окружающей человека действительности, ее содержанием и результатами актов познания.

Различают две формы познания - *чувственное* и *логическое*. В *чувственном познании* человек получает чувственные впечатления, представляющие образ действительности; эти впечатления могут быть выражены в форме определенных суждений. *Логическое познание* включает анализ, синтез, истолкование и умозаключение, построенные на образах действительности, т. е. оно совершается в области абстракции. В результате логического познания формулируются вопросы, гипотезы, вскрываются отношения между явлениями и объектами.

Основа чувственного и логического познания – наблюдения и эксперименты. Если восприятие должно отразить количественные отношения, то наблюдение называется измерением. Следовательно, *измерение* есть акт познания действительности, причем результат измерения должен удовлетворять требованиям объективной истины. Для того чтобы образ действительности, полученный посредством измерений и представленный в области абстракции, был объективным, должны быть выполнены определенные операционные действия.

1.1.2. Объекты познания и их образы

Объектом измерения является какая-либо избранная характеристика определенного предмета или явления, составляющего фрагмент действительности. Эта характеристика проявляется в исследуемых объектах или в одном объекте с различной интенсивностью, что выражается различными состояниями характеристики, как это показано на рис. 1.1. Человек, *субъект познания*, реализуя познавательный акт, решает, насколько детальным должно быть познание, какую цель оно преследует.

Данная характеристика может быть специфична для одного объекта, когда исследуются его особенности; в этом случае число определяемых состояний может быть меньшим, чем для некоторого множества объектов, имеющих ту же характеристику.

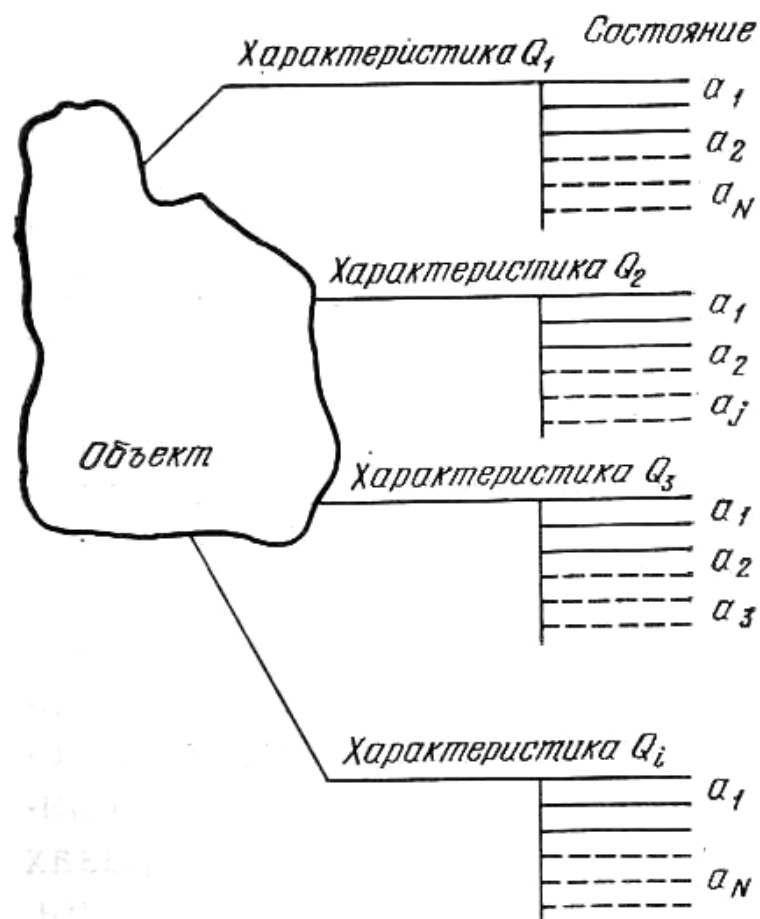


Рис. 1.1. Познаваемый объект (основные понятия)

Образом состояния избранной характеристики, ее величиной, является некий символ, отражающий состояние характеристики в области сформулированных образов, т. е. в абстракции. Образ отображения состояния характеристики в этом множестве называется мерой этого состояния или *значением величины*. Необходимым условием однозначного отображения состояний данной характеристики является упорядоченная однозначность.

В сфере реальности существуют:

- множество объектов M ;
- множество характеристик Q – свойств одного или многих объектов;
- множество состояний $A=(a_1, \dots, a_N, \dots)$, в которых может находиться каждая из характеристик.

В сфере абстракции создается:

- множество наименований объектов M' ;
- множество величин Q' , отражающих различные характеристики;
- множество значений величин $B= (b_1, \dots, b_N, \dots)$.

Это иллюстрирует рис. 1.2.

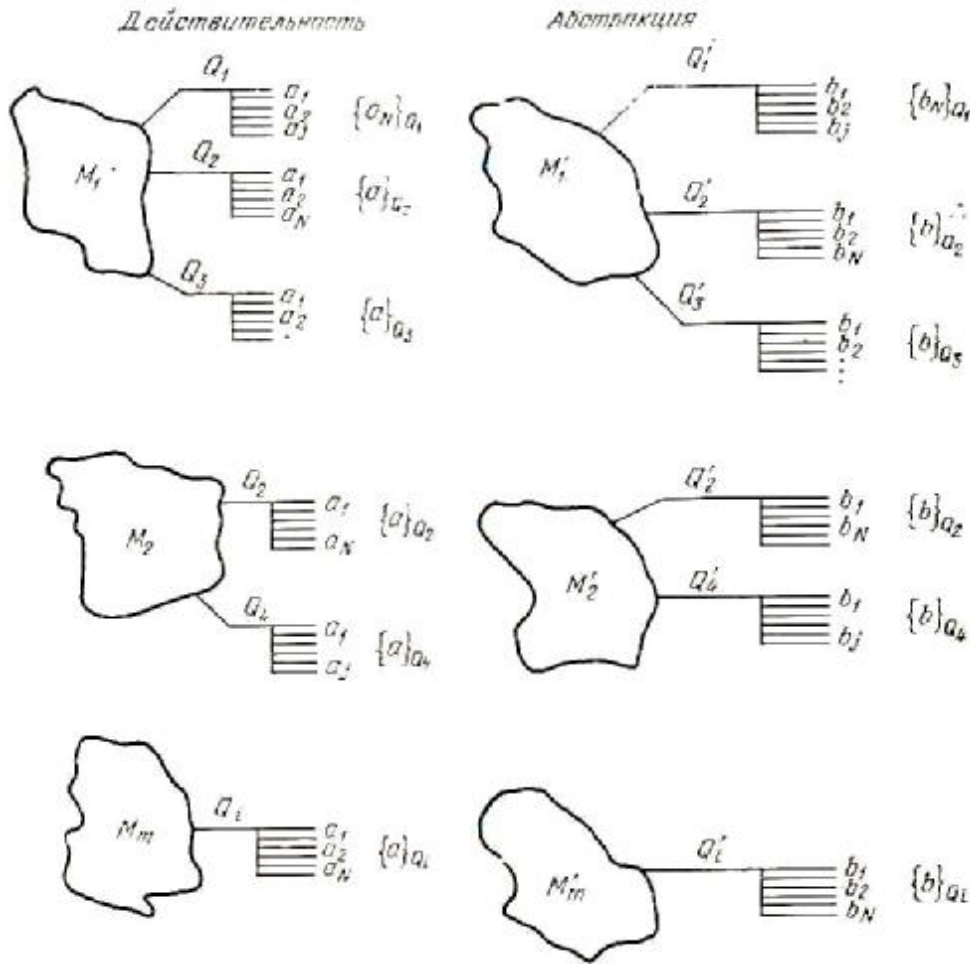


Рис. 1.2. Фрагмент действительности и его образ в сфере абстракции

1.1.3. Формализм познания

Образом действительности является отображение

$$\{M'\} \equiv \{M\}, \{Q'\} \equiv \{Q\}, \{A\} \rightarrow \{B\}, \quad (1.1)$$

$$b = f(a), \quad (1.2)$$

такое, что для всех элементов множества $\{A\}$ существует обратное отображение

$$a^* = f^{-1}(b), \quad (1.3)$$

причем выполняется условие

$$a^* = a, \quad f(a) = b \quad (1.4)$$

для всех элементов множества $\{A\}$.

Символ f^{-1} означает отображение, обратное по отношению к f ; это значит, что отображение f взаимно однозначно в области $\{A\}$. Отсутствует требование равной мощности множеств A и B . Могут существовать элементы множества B , в которые не отображается ни один из элементов множества A , например, если B – множество действительных чисел.

Отображение f_Q называется *шкалой величины Q*. В дальнейшем такая шкала будет называться *эмпирической*. С помощью эмпирической шкалы можно получать образы действительности в форме некоторых утверждений об эквивалентности состояний $\{A\} = (a_1, \dots, a_N)$, признанных эталонными (состояниями сравнения), исследуемым состояниям $\{X\} = (x_1, \dots, x_k)$ той же характеристики. Так, если в соответствии со шкалой, f_x значение b_j есть образ состояния x_i ,

$$b_j = f_x(x_i), \quad (1.5)$$

и при этом, если

$$b_j = f_x(a_q), \quad (1.6)$$

то вследствие идентичности b_j и с учетом того, что существует обратное отображение

$$x_i = f_x^{-1}(b_j), \quad f_x^{-1}(b_j) = a_q, \quad (1.7)$$

имеем

$$x_i \Leftrightarrow a_q. \quad (1.8)$$

Таким образом, идентичность значений характеристик означает эквивалентность состояний величин.

1.1.4. Основные соотношения характеристик

Созданный таким путем образ действительности недостаточен, так как он не отражает те числовые отношения, в каких находятся образы выделенных состояний данной характеристики. Принципиальной задачей познания действительности является выделение и установление характеристик, выражающих свойства различных объектов и явлений, а также исследование связей (отношений), существующих между состояниями данной характеристики.

Раньше всего и лучше всего были изучены отношения, существующие между такими характеристиками, как длина и масса. Соотношениями между длинами отрезков занималась геометрия. Множеством значений образа этих характеристик является множество положительных действительных чисел, определенных на числовой оси.

Принципиальное значение имеют отношения:

а) *эквивалентности* — любые два элемента множества B состоят в одном из двух соотношений:

$$\text{либо } b_1 = b_2, \quad \text{либо } b_1 \neq b_2; \quad (1.9)$$

б) *строгого упорядочения состояний* — каждому элементу множества B соответствует определенное положение на числовой оси, и любые два элемента находятся в соотношении:

$$\text{либо } b_1 < b_2, \quad \text{либо } b_1 > b_2; \quad (1.10)$$

в) *эквивалентности и строгого упорядочения интервалов* — разность двух элементов множества B относительно двух других элементов находится в соотношении

$$\begin{aligned} & b_1 - b_2 = b_3 - b_4, \\ \text{либо} \quad & b_1 - b_2 < b_3 - b_4, \\ \text{либо} \quad & b_1 - b_2 > b_3 - b_4; \end{aligned} \quad (1.11)$$

г) *эквивалентности и строгого упорядочения частных* — каждое частное от деления двух элементов множества в отношении к частному от деления двух других элементов определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} & b_1 / b_2 = b_3 / b_4, \\ \text{либо} \quad & b_1 / b_2 < b_3 / b_4, \\ \text{либо} \quad & b_1 / b_2 > b_3 / b_4 \end{aligned} \quad (1.12)$$

(здесь элементы b_2, b_4 не могут иметь значение 0).

Для длины и массы эти соотношения справедливы.

По мере изучения других характеристик, а также отношений между их состояниями использовались отображения в множество действительных чисел, что послужило поводом для переноса тех же взаимосвязей на другие характеристики. Такого типа связи проверялись экспериментально при формулировании законов физики. При этом в неявной форме предполагалось, что образы действительности выражаются действительными числами в метрических шкалах.

Итак, в основу создания элементов образа *действительности* положено допущение, что значения отображения принадлежат множеству положительных действительных чисел; это основное положение используется при выражении физических законов, устанавливающих взаимосвязи между состояниями различных характеристик. В случае иного отображения образ действительности, создаваемый физикой, был бы иным и выражался бы другими законами. В свою очередь, законы физики позволяют установить пропорции между интервалами и частными от деления значений величин, описывающих явления действительности в понятиях логического познания.

1.1.5. Основные и производные величины.

Возвращаясь к *функции, отображающей* состояния величины в значения (1.2), и к свойству множества $B = R^+$, отметим, что если существуют отношения эквивалентности и строгого упорядочения для состояний, интервалов и частных от деления, то такие же самые отношения существуют, если

$$b = kf(a), \quad (1.13)$$

где $k = \text{const}$. В принципе k - неизвестная величина, но при использовании различных значений k получаются множества B , каждое из которых является линейным преобразованием исходного множества для $k = 1$. Для ос-

новых величин условно устанавливаются значения $k = 1$ путем присвоения выделенному состоянию (мере) значения 1. Также условно определяются значения k для остальных, т. е. производных величин. Производные величины при $k = 1$ включаются в общую систему единиц измерений. Общепринятой в настоящее время является международная система единиц СИ.

Формулирование образов действительности осуществляется посредством двух групп физических величин:

I - величины, единицы которых входят в состав системы единиц СИ; это *метрические величины*, которые отображаются во множество действительных чисел;

II - величины, измеряемые посредством *эмпирических шкал*, а также величины, отображенные в множество действительных чисел, но не входящие в систему СИ.

Для каждой из этих групп производится оценка состояния знания — является ли это состояние стабильным и какие метрологические проблемы для него характерны.

1.1.6. Проблема измеримости и неизмеримости величин. Виды шкал

Измеримость или неизмеримость явлений, а тем самым проблема единиц измерения, представляет собой основную проблему не только метрологии, но и всех точных наук, где исследование соотношений имеет не только качественный, но и количественный характер. Измеримость явлений, изучаемых наукой, характеризует меру ее точности и уровня развития.

В отношении измеримых величин процесс развития систем единиц измерений является отражением эволюции знания и науки. Метрическая система основывалась на двух величинах: длине и массе. Система СГС Гаусса расширила круг взаимосвязанных явлений. В систему СГС (или МКГСС) включены единицы электрических (Дж. Джорджи), термодинамических и световых величин, что охватывает почти всю сферу материального мира. Возможно, оставшиеся области науки удастся включить в систему СИ.

Для второй группы характерны величины, измеряемые посредством эмпирических шкал. К наиболее известным относятся шкалы:

— 12-балльная шкала Бофорта для силы морского ветра, введенная в 1806 г. (фрагмент шкалы дан в табл. 1.1);

— шкала Мооса - для твердости минералов, построенная на 10 образцах (1812 г.);

— шкала Соренсена для характеристики химических реакций с помощью рН, 1909 г.;

— шкала вязкости Энглера;

— шкалы цвета, жесткости, замутненности и т. д. воды.

Эти шкалы были созданы в свое время для удовлетворения практических нужд на основе соответствовавших тому времени знаний.

Таблица 1.1.

Шкала Бофорта (опущены баллы 9-12)

Балл Бофорта	Название ветра	В открытом море	На суше	Скорость ветра, м/с
0	Штиль	Море гладкое, как зеркало	Дым поднимается вертикально	0÷0,2
1	Тихий ветер	Мелкая рябь	Дым поднимается не вполне вертикально	0,3÷14,5
2	Лёгкий ветер	Очень маленькие и короткие, незаламывающиеся волны	Ощущение дуновения на лице	1,6÷3,3
3	Слабый ветер	Маленькие и короткие волны с заламывающимися гребешками и стекловидной пеной	Шевелятся листья на деревьях	3,4÷5,4
4	Умеренный ветер	Малые, начинающие удлиняться волны, много белых гребешков	Шевелятся ветки деревьев	5,5÷7,9
5	Свежий ветер	Средней величины заметно удлиненные волны, много белых гребешков	Шевелятся ветви деревьев	8,0÷10,7
6	Сильный ветер	Большие волны с белыми пенистыми гребешками	Шевелятся толстые ветви деревьев	10,8÷13,8
7	Крепкий ветер	Большие волны, ветер срывает с заламывающихся гребешков белую пену	Шевелятся тонкие стволы деревьев	13,9÷17,1
8	Очень крепкий ветер	Высокие обрушивающиеся волны большой длины, ветер срывает с них верхушки и несёт их в виде водной пыли	Хожение против ветра затруднительно, гнутся стволы деревьев	17,2÷20,7

В табл. 1.2 приведены шкалы, различные по взаимосвязям между состояниями определенной характеристики.

Таблица 1.2.

Виды измерительных шкал

№ п/п	Наименование шкалы	Отношение между состояниями	Число состояний сравнения	Пример
1	Номинальная	Эквивалентность состояний	N	Сборник образцов цветов, форма образа
2	Порядковая	Эквивалентность и строгое упорядочение состояний	N	Шкала Мооса, шкала Бофорта
3	Интервальная	Эквивалентность и строгое упорядочение состояний и интервалов между ними	2	Шкала календарного времени, температурная шкала Цельсия
4	Масштабная	Эквивалентность и строгое упорядочение состояний, интервалов между ними и частных от деления состояний	1	Шкалы величин СГС, СИ
5	Натуральная	Эквивалентность и строгое упорядочение состояний, интервалов между ними и частных от деления состояний	0	Подсчет числа элементов множества

Отношения между величинами определяются более полно, если величина выражается в метрической масштабной шкале (частных от деления), а не в шкале типа Бофорта. Отображение шкалы Бофорта в метрической шкале дает последняя колонка табл. 1.1. Шкала вязкости Энглера преобразуется в метрическую шкалу взаимосвязанной системы единиц преобразованием типа $\{E\} \rightarrow \{v\}$:

$$v = \frac{E}{100} 7.6^{(1-1/E^3)} \cdot 10^{-4} \quad (1.14a)$$

$$\text{либо } v = (7.31E - 6.31/E)10^{-6} \quad (1.14b)$$

Здесь E - вязкость в градусах Энглера, v - кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$.

Эмпирическая шкала применяется в тех случаях, когда уровень познания явления не позволяет точно установить отношения, существующие между величинами данной характеристики, либо применение эмпирической шкалы удобно и достаточно для практических целей.

1.1.7. Шкалы цвета

Величиной, до недавнего времени измерявшейся в номинальной шкале, является цвет. Существуют атласы и сборники цветовых образцов, содержащие несколько или более десяти цветов, выделенных и обозначенных названиями, или несколько сотен цветов, обозначенных названиями либо номерами. Путем чувственного сравнения цвета исследуемых тел с цветовыми образцами атласа можно установить их соответствие либо несоответствие друг другу. Результат сравнения дает право сформулировать определенное заключение, представляющее собой образ фрагмента действительности по номинальной шкале, эталонные значения которой определяются набором образцов. Это достаточно грубая и субъективная оценка цвета.

Исследование цвета имело два аспекта - физический и психофизический. Первый был разрешен с момента открытия волновой природы света и изучения его спектральных характеристик. Второй относится к впечатлениям, получаемым человеком.

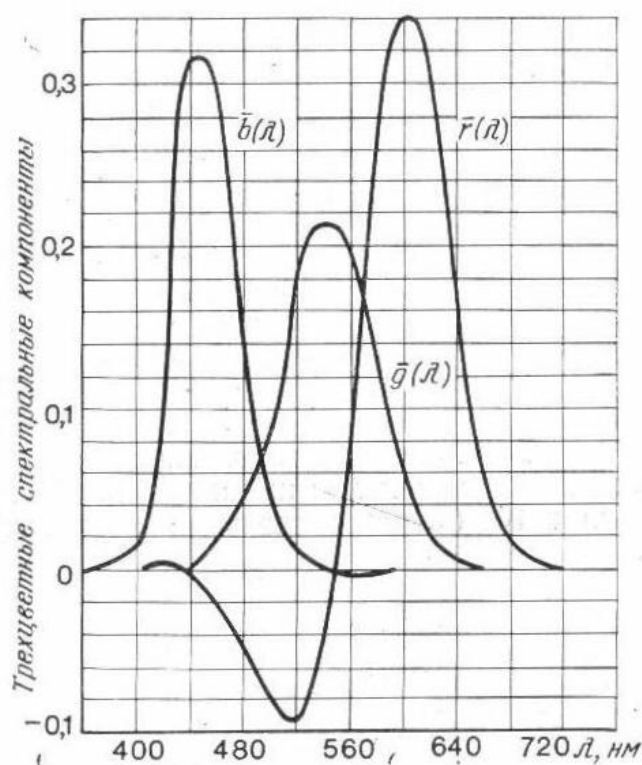


Рис.1.3. Спектральные характеристики основных компонент хроматического цвета по шкале МКО, 1931 г.

Смешение цветов осуществляется согласно законам Грассмана, сформулированным в 1853 г. В 1931 г. Международная комиссия по освещению (МКО) разработала трехцветную цветовую шкалу. В соответствии с этой шкалой свойством предмета считается цвет, составленный из трех основ-

ных цветов: красного R (600 нм), зелёного G (540 нм) и голубого B (450 нм) со спектральными характеристиками, показанными на рис. 1.3. Цвет объекта может быть описан вектором в трехмерном пространстве с компонентами $r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $b(\lambda)$. Оси координат представляют собой множества действительных чисел. Все векторы, лежащие на прямой, проходящей через начало системы координат, имеют одинаковую цветность, а яркость возрастает с удалением точки от начала координат.

Для того чтобы охарактеризовать цвет, достаточно знать компоненты вектора, соответствующие условию (1.15).

$$C = \frac{R_i}{R + G + B}(R) + \frac{G_i}{R + G + B}(G) + \frac{B_i}{R + G + B}(B) = 1. \quad (1.15)$$

Символы в скобках означают основную компоненту, а буквы R , G , B - количество данной компоненты (яркость). Дробь определяет долю каждой компоненты.

Суммирование двух цветов, описываемых векторами:

$$C = r_1(R) + g_1(G) + b_1(B), \quad (1.16a)$$

$$C = r_2(R) + g_2(G) + b_2(B), \quad (1.16b)$$

даёт цвет

$$C = C_1 + C_2 = r(R) + g(G) + b(B), \quad (1.17)$$

где $r = r_1 + r_2$, $g = g_1 + g_2$, $b = b_1 + b_2$.

Соответствующим преобразованием введены координаты X , Y , Z компонент фиктивных цветов со спектральными характеристиками, соответствующими рис. 1.3.

Для полного определения хроматического цвета недостает еще количественного определения визуальных впечатлений, получаемых человеком, а также учета влияния раздражителей. Для учета чувствительности человеческого глаза введено понятие *яркости* цвета.

Яркости единичных вкладов основных компонент R , G , B треххроматического цвета находятся в соотношении

$$L_r : L_g : L_b = 1,0000 : 4,5907 : 0,0601. \quad (1.18)$$

Это позволяет вычислить яркость вектора C по формуле

$$L_c = rL_r + gL_g + bL_b \quad (1.19)$$

или, после введения пропорции (1.18), по формуле

$$L_c = k(1,0000r + 4,5907g + 0,0601b). \quad (1.20)$$

Единица измерения яркости L имеет размерность [кд/м]. Поток излучения описывается четырехмерным вектором $C = (R, G, B, L)$.

Иными словами, образы действительности, получаемые с помощью данной шкалы цвета, имеют объективный характер.

1.1.8. Шкала замутненности воды

Рассмотрим другой пример измерения в *эмпирической шкале* - измерение замутненности воды частицами взвеси.

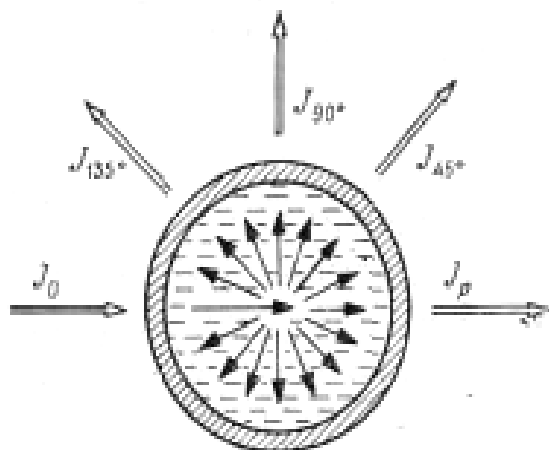


Рис.1.4. Принцип нефелометрического измерения мутности воды

Концентрация взвеси твердых частиц в воде рассматривается как свойство исследуемого объекта. Чаще всего используется нефелометрическое измерение, связывающее интенсивность рассеянного света при постоянной интенсивности падающего света с концентрацией взвеси. Это иллюстрирует рис. 1.4. Сравниваются состояния объекта при различной концентрации взвеси или диатомита в воде. Измеряемой характеристикой является эффект рассеяния света. Концентрация взвеси, как и интенсивность света, выражается в метрической шкале, а между обеими величинами существует взаимосвязь, описываемая формулой Уэллса:

$$\log \frac{J_0}{J} = k \frac{lcd^3}{d^4 + \alpha\lambda^4}, \quad (1.21)$$

где c - концентрация частиц, l - толщина слоя, d - средний диаметр частиц, λ - длина падающего излучения, k , α - постоянные коэффициенты.

Сложность и неоднозначность отношений, вызванная разбросом результатов измерений и разнообразием формы частиц, химического состава и физико-химических свойств взвеси, приводит к тому, что измерения воссоздают только фрагментарный образ действительности. Замутненности исследуемой жидкости и эталона эквивалентны лишь в смысле одинаковой способности рассеяния света, а не физико-химического состава и свойств взвеси.

Использование для измерения замутненности воды нефелометрического принципа не продиктовано недостатком знаний. Можно было бы либо измерить величины, входящие в формулу (1.21), и уменьшить неопределенность результата, либо использовать другие принципы измерений, например, подсчет количества частичек в единице объема воды с описанием их размеров, форм, химического состава и т. д. Однако такие измерения очень трудоемки и дороги, а задержка в получении результата уменьшает полезность метода его получения. Применение нефелометрического метода обусловлено практическими соображениями. Создаваемый им упрощенный образ действительности имеет меньшее познавательное значение, но в практических целях этого вполне достаточно.

1.1.9. Проблема расширения метрической системы

Особую интересную проблему научных исследований составляют так называемые неизмеримые величины. Однако постановка этой проблемы различна в естественных науках, где предметом исследования является материальный мир, и в гуманитарных науках. В естественных науках проблема заключается в расширении границ познания действительности или в формулировании образов, упрощающих сложные явления, но удобных для практической деятельности человека.

Каждая из естественных наук занимается изучением определенного фрагмента действительности, и оценка познавательных результатов этих наук не имеет отношения к метрологии. Задача метрологии состоит в изучении явлений, используемых для создания эталонов и измерительных средств.

Это положение можно проиллюстрировать не очень давней, а значит, легко прослеживаемой историей изучения эффекта Джозефсона. Она начинается с открытия Камерлинг-Оннесом (в 1911 г.) эффекта сверхпроводимости. Разработанная в 1950-х гг. теория сверхпроводимости привела к определению свойств так называемых куперовских пар электронов, создающих осциллятор, описываемый уравнением

$$d\phi/dt = (2\pi/\Phi_0)V, \quad (1.22)$$

в котором Φ - разность фаз волновой функции Шрёдингера, V - контактное напряжение материалов в состоянии сверхпроводимости, $\Phi_0 = h/2e$ - квант магнитного потока, h - постоянная Планка, e - заряд электрона.

По мере развития исследований эффект Джозефсона становился для физики ключевым, так как определилась новая фундаментальная физическая постоянная $h/2e$. Исследования показали, что воспроизводимость значения этой постоянной по точности превышает все существующие. Для науки в целом и для метрологии в частности появилась возможность определения эталонного состояния для образцов электрических и электромагнитных явлений. Международный комитет мер и весов (МКМВ)

принял за определение единицы напряжения (вольт) величину напряжения, вычисляемую по формуле (1.22), с измерением частоты при значении постоянной

$$2e/h = 483,594\,000 \text{ МГц/мкВ}, \quad (1.23)$$

описывающей эффект Джозефсона.

Другой результат изучения проблемы неизмеримых физических величин - создание упрощенных образов действительности - связан с возможностью выбора оптимальных измерительных средств с хорошими метрологическими и эксплуатационными качествами. Это предмет интересов метрологии.

Проблема измеримости явлений, которыми занимаются гуманитарные науки, еще более сложна, так как касается оценок человеческих ощущений — как индивидуальных, так и коллективных. Знаменательными особенностями измерений в гуманитарных науках являются рассмотрение человека как средства измерения и нематериальность сравниваемых состояний. Эталонные состояния человек создает в своем воображении. При этом он учится, приспосабливается, устает, переживает различные воздействия, помнит и забывает. Поэтому человек не является измерительным средством со стабильными качествами.

Тем не менее, в гуманитарных науках также стремятся к количественному познанию изучаемых явлений. Чтобы сделать результат познания объективным, необходимо определить шкалу для его измерения. Интерпретация впечатлений, получаемых человеком, характеристики эмоций и интеллекта — предмет исследований физиологии, психологии и других наук, но не метрологии. После количественной оценки свойств того или иного фрагмента действительности определения шкал соответствующих новых величин будут включены в метрологию. Примером может служить трехкомпонентная цветовая шкала. Благодаря использованию этой шкалы можно объективно измерять цвета и исследовать отношения их состояний полнее, чем это позволяет номинальная шкала.

При изучении явлений гуманитарных наук, пока недоступных измерениям, возникает общая проблема философии и метрологии. Возможно ли вообще измерение характеристик воображаемых объектов инструментом с неизвестными и изменяющимися свойствами в отсутствие материальных эталонов? Ответ, основанный на классической теории измерений, в настоящее время отрицателен. Но тем не менее такие измерения производятся. Это измерения уровня интеллекта с помощью тестов, измерения потребительских качеств изделий и других характеристик.

1.2. Физические шкалы и неоднозначность образов действительности

1.2.1. Неоднозначность отображения

Создавая образы действительности с помощью измерений, мы получаем неоднозначные отображения. Состояние a измеряемой характеристики x отображается в множествах значений области абстракций, а именно:

$$a \Rightarrow B_a = \{b\} , \quad B_a \equiv \{b\} . \quad (1.24)$$

Элементы множества B , поставленные в соответствие состоянию a (если в общем виде $B \subset R$), неравнозначны. Можно допустить, что вероятность отображения $b=f(a)$ больше или меньше вероятности $b+\varepsilon = f(a)$, где $\varepsilon > 0$. Поэтому выбор элементов множества B , отвечающего состоянию a , определяется мерой $p \in < 0.1 >$, такой, что

$$\sum_{b \in B_a} p_a(b) = 1 \quad (1.25a)$$

или

$$\int_{(B_a)} p_a(b) db = 1 . \quad (1.25b)$$

Соответствие (1,24) принимает вид

$$a \Rightarrow \{b, p_a(b)\} , \quad (1.26)$$

При этом множества B и P равномощны. Примером соответствия (1.26) служит функция $p(b)$, представленная на рис. 1.5.

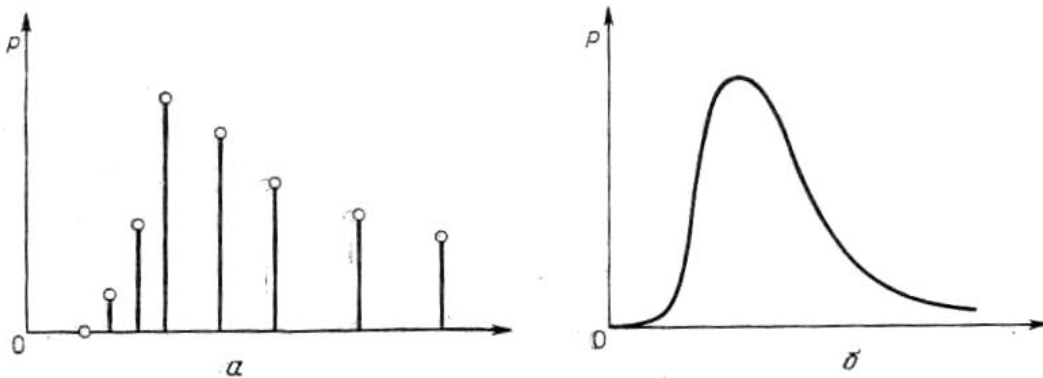


Рис. 1.5. Вероятность отображения состояния a в сфере абстракции:
(а) – дискретная функция, (б) – непрерывная.

Соответствие (1.26) имеет то свойство, что к состоянию a , реализованному с вероятностью $P = 1$, отнесено множество событий, выраженных условием (1.25a), либо (1.25b). Поэтому для определения измерительной шкалы из множества B_a нужно выбрать только один элемент b^* , а именно

тот, который лучше всех отображает состояние a . Выбор такого элемента выполняется в соответствии с решением D , таким, что

$$b^* = D(p_a). \quad (1.27)$$

1.2.2. Правила выбора элементов

Используются различные *решающие правила*, но в любом случае правило должно быть известно. Так, например, D_1 определяет, что наилучшим образом состояния a является наиболее вероятное (так называемое модальное) значение b^* :

$$D_1(p_a) = b_1^*, \quad \text{такое, что} \quad p_a(b_1^*) = \max_{b \in B_a} p_a(b). \quad (1.28a)$$

Можно использовать иное правило, например выбор среднего значения, т.е.

$$D_2(p_a) = b_2^*, \quad \text{такого, что} \quad \int_{-\infty}^{\infty} b p_a(b) db = b_2^* \quad (1.28б)$$

либо

$$\sum_i b_i p_{ai} = b_2^*,$$

либо правило медианы:

$$D_3(p_a) = b_3, \quad \text{причём} \quad p_a(b_3) = 1/2, \quad (1.28в)$$

такое, что $p_a(b \leq b_3^*) \geq 1/2$, либо $p_a(b \geq b_3^*) \geq 1/2$. Значения $b_1^*, b_2^*, \dots$, вообще говоря, различны, хотя в некоторых случаях могут быть одинаковыми. Так, например, для симметричной функции $p_a(b)$ имеем $b_1^* = b_2^*$. Точка b^* входит в множество B , $b^* \in B$, но она может не быть точкой множества B_a .

1.2.3. Критерии соответствия отображений

Выбор значения b^* как образа состояния a правилен, если между этими элементами существует соответствие

$$b^* = f(a), \quad (1.29)$$

а также обратное отображение в окрестности образа b^*

$$a^* = f^{*-1}(b^*), \quad (1.30)$$

причем f^{*-1} является оператором (или функцией) обратного отображения. Символом $*$ обозначаются отображения, создающие физические шкалы, для отличия их от постулированных математических шкал (1.2).

Другой существенной особенностью операции отображения f^* , а также f^{*-1} является то, что они должны быть определены не только для состояния a или значения b^* , но и в окрестности этого состояния или значения. Обозначив отклонение состояния a символом u , распределение области отображения можно записать следующим образом:

$$b^* + v = f^*(a + u), \quad (1.31)$$

где v — отклонение от точки b^* . Обратное отображение принимает вид

$$a^* + u = f^{*-1}(b^* + v). \quad (1.32)$$

Существование обратного отображения в окрестности образов имеет место для аддитивных величин, измеряемых в метрической шкале. В случае аддитивных шкал имеем:

$$b^* + v = f^*(a + u) = f^*(a) + f^*(u), \quad (1.33)$$

откуда с учетом (1.29) получаем выражение

$$v = f^*(u) \quad (1.34a)$$

а также

$$u = f^{*-1}(v). \quad (1.34b)$$

Свойство (1.33) означает, что измерительная функция f^* (оператор отображения) для случая метрических шкал является линейным оператором.

1.2.4. Неопределенность обратного отображения

Вернемся к выражению (1.24). Если утверждается, что множество B_a составляет окрестность точки b^* , то в силу (1.34) должно быть возможно поэлементное отображение множества $\{b_a\}$ во множество состояний, которое обозначим

$$A_a = f^{*-1}(B_a). \quad (1.35)$$

Выполнением операции обратного отображения (1.34) мы получили результат, имеющий следующую интерпретацию. *Образом состояния a* является множество B_a ; этот образ может быть представлен в области состояний соответствующей характеристики как множество A_a^* . Это означает, что существует несколько состояний $a_i \in A_a^*$, $i=1, 2, \dots$, которые интерпретируются как состояния a . Постулируемая отображением (1.24) ограниченная способность различения человеком (непосредственно или с помощью применяемых им измерительных средств) состояний, образующих окрестность состояния a , может быть записана в виде

$$a \Rightarrow B_a \Leftrightarrow A_a^*. \quad (1.36)$$

При физических измерениях измерительная шкала создает отношение (1.35), вытекающее из свойств данной характеристики. Если отношение (1.35) идентично отношению (1.2), то измерительная шкала выражает отношения между состояниями, обусловленные свойствами шкалы (1.2).

1.2.5. Способы характеристики неопределенности. Отклонение элементов множества

После введения отображений (1.35), (1.36) возникает вопрос о мере эквивалентности состояний a и a^* . С учетом $b^* = f^*(a)$ и $a^* = f^{*-1}(b^*)$ получаем:

$$a^* = f^{I*}[f^*(a)] = a, \quad (1.37)$$

т. е.

$$a \Leftrightarrow a^*. \quad (1.38)$$

Вместе с тем данная эквивалентность существует в пределах способности различения, выраженной соотношением (1.36). Поскольку выбор решающего правила влияет на значение b^* (а тем самым, по соотношению (1.30), и на состояние a^*), то, как показано на рис. 1.6, может существовать много состояний a^* , эквивалентных первичному состоянию a , и разность

$$a^* - a = \text{const} \quad (1.39)$$

может оказаться одинакова для любого из возможных решающих правил. Поэтому выбранная по решению D (1.27) точка b^* не характеризует неоднозначность образа состояния a , полученного в результате измерения.

Использование множества $\{b^*, p_a(b^*)\}$ затруднительно и не всегда необходимо. Рассмотрим сначала пример $p_a = \text{const}$; при этом из условия $\int p_a(b)db = 1$ вытекает, что

$$p_a(b^*) = 1/(b_v - b_n), \quad (1.40)$$

если b_v и b_n означают верхний и нижний пределы множества B_a .

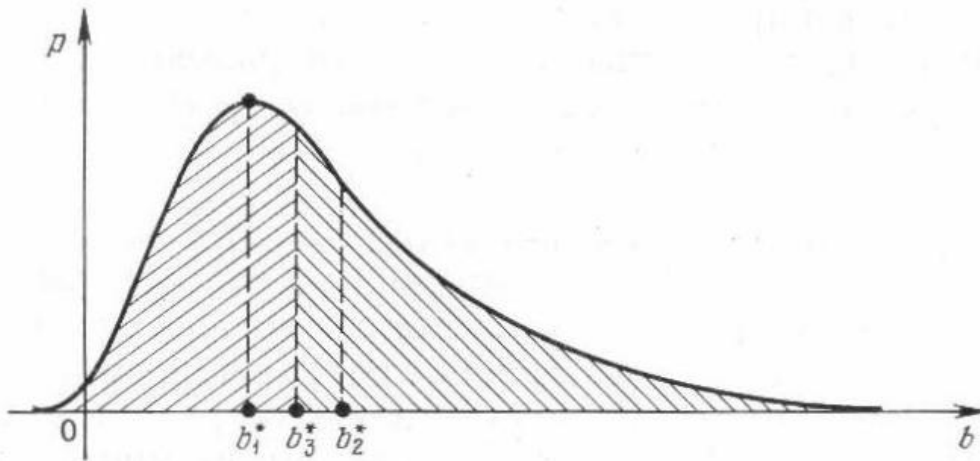


Рис. 1.6. Образы состояния a для правил решения D_1, D_2, D_3

Неопределенность образа можно характеризовать удалением (отклонением) $\rho(b^*, b)$ элементов множества B_a от точки b^* , если пространство B , в котором представлены случаи $b \in B_a$, наделено метрикой.

С учетом предположения $B \subset R$ пространство событий $b | a$ нормируемо, и в соответствии с используемыми нормами этого пространства отклонения ρ таковы:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \rho_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |b_i - b^*| \quad ; \quad (1.41)$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b_i - b^*)^2} \quad ; \quad (1.42)$$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{1/q}, \quad \rho_3 = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b_i - b^*)^q \right]^{1/q} \quad (1.43)$$

и т.д.

Важным свойством отклонения является то, что область ρ определяет область в множестве B . Множество B_a с помощью точки b^* упорядоченно разделено на два непересекающихся подмножества B_H и B_B , таких, что

$$B = B_H \cup B_B. \quad (1.44)$$

Отклонения по типу (1.41) - (1.43) могут быть обозначены отдельно для множеств B_H , B_B как ρ_H и ρ_B соответственно.

1.2.6. Меры множеств

Иным способом выражения *неоднозначности отображения* состояния a в значение $b \in B_a$ для рассматриваемого случая $p_a(b) = 1/(b_B - b_H)$ является применение меры множества, например меры Лебега, меры Радона и т.д. Каждому из множеств B , B_H , B_B (1.44) по мере Лебега соответствуют значения

$$\mu(B_H) = \mu_H = b^* - b_H > 0, \quad (1.45a)$$

$$\mu(B_B) = \mu_B = b_B - b^* > 0, \quad (1.45b)$$

$$\mu(B) = \mu(B_H \cup b^* \cup B_B) = \mu_H + \mu_B = 2\mu, \quad (1.45v)$$

причем

$$\mu(B_a) = b_B - b_H. \quad (1.45г)$$

Если вероятность $p_a(b) \neq \text{const}$, что бывает чаще всего, то прямое нахождение меры ввиду неопределенности $a = \{b, p_a(b)\}$ весьма трудно. Такая мера должна состоять из малого числа параметров, быть легко уяснимой и, главное, не требовать для ее определения знания распределения вероятности $p_a(b)$. Дело в том, что некоторые распределения вероятностей, такие как экспоненциальное, геометрическое, распределения Пуассона и Стюдента, описываются одним параметром, а нормальное, равномерное, биномиальное распределения - с помощью двух параметров, т.е. в общем случае

$$p_a(b) = p(b, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots), \quad (1.46)$$

где $\theta_1, \theta_2, \dots$ - параметры функции распределения вероятности.

Указание вида распределения, решающего правила D (1.27), выбора значения b^* , а также одного или соответственно двух параметров полностью характеризуют b^* и неоднозначность отображения (1.26). Важно, чтобы степень неоднозначности отображения можно было установить, не пользуясь распределением вероятности $p_a(b)$, а также чтобы ее смысл не зависел от типа распределения вероятности. Следует отметить, что такой меры, которая описывала бы ту или иную неоднородность более однородно, не существует, если потеря информации о неоднородности не компенсируется дополнительной информацией. Поэтому для характеристики *неоднозначности отображения*

применяется ряд частичных мер, неполных в сравнении с $p_a(b)$, но каждая из них выражает эту неоднозначность в каком-либо более узком смысле.

1.2.7. Виды отклонений. Общий случай

Первую группу составляют меры, близкие к мерам отклонения (1.41) - (1.43); каждый элемент множества B_a учтен с весом, равным $p_a(b_i)$, причем для $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется условие $\sum_B p_a(b) = 1$. Аналогичным образом, для ρ_1 (1.41) средневзвешенное отклонение элементов множества B_a от точки b^* составляет

$$d_{cp} = \sum_{i=1}^n \left[|b_i - b^*| p_a(b_i) \right] \quad (1.47a)$$

либо

$$\bar{d} = \int_{B_a} \left[|b - b^*| p_a(b) \right] db . \quad (1.48b)$$

Среднеквадратическое отклонение (1.42) называется *стандартным отклонением* распределения вероятности. Оно рассчитывается по формуле

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[(b_i - \bar{b})^2 p_a(b_i) \right]} \quad (1.49a)$$

либо

$$\sigma = \sqrt{\int_{B_a} \left[(b - \bar{b})^2 p_a(b) \right] db} , \quad (1.49b)$$

где значение $\bar{b} = b_2^*$ в соответствии с решением D_2 .

Для распределений $p_a(b)$, симметричных относительно точки b^* , выполняется условие $b_1^* = b_2^* = b^*$. Аналогично для отклонения ρ_3 (1.43) определяются при $b = b_2^*$, $q = 2, 3, 4, \dots$ центральные моменты порядка q вероятностного распределения:

$$m_q = \sum_{i=1}^n \left[(b_i - \bar{b})^q p_a(b_i) \right] \quad (1.50a)$$

или

$$m_q = \int_{B_a} \left[(b - \bar{b})^q p_a(b) \right] db . \quad (1.50b)$$

1.2.8. Интервальные меры

Первое условие. Вторую группу мер неоднозначности отображения $a \rightarrow B$ образуют интервальные меры, близкие к мере Лебега, после выделения определенного подмножества из множества B_a посредством дополнительного условия. Можно поставить условие, чтобы вероятность реализации элемента b_i была соответственно велика, например:

$$p_a(b_i) > p_{\min} > 0. \quad (1.51)$$

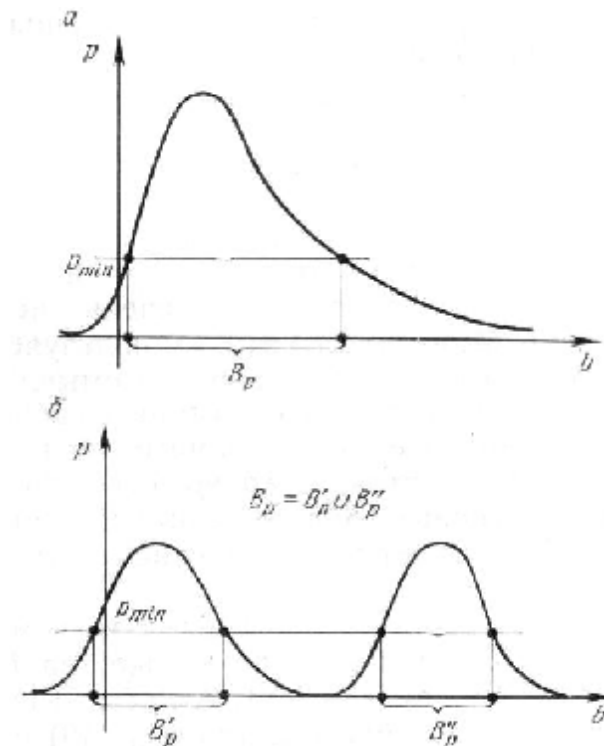


Рис. 1.7. Мера неоднозначности образа при $p_a(b) > p_{\min}$:
 а - графическая интерпретация меры;
 б - случай, когда мера не вполне характеризует неоднозначность образа

Условие (1.51) выполняется для множества

$$B_p = \{b \in B_a : p(b) > p_{\min}\}, \quad (1.52)$$

как это иллюстрирует рис. 1.7,а. Множество B_p можно охарактеризовать мерой Лебега (1.46), и тогда

$$\mu(B_p) = \mu_n + \mu_v = 2\mu, \quad (1.53)$$

где $\mu = (\mu_n + \mu_v)/2$.

Достоинством условия (1.51) ($p > p_{\min}$) является ограничение множества образов тогда, когда множество B_a теоретически бесконечно (например, множество с нормальным распределением). Для нормального распределения выбор $p_{\min}$ из условия

$$p_{\min}/p_{\max} = 0.1 \text{ приводит к } \mu(B_p) = 2 \cdot 2,15\sigma = 4,30\sigma, \quad (1.54)$$

а из условия

$$p_{\min}/p_{\max} = 0.01 \quad - \quad \text{к} \quad \mu(B_p) = 2 \cdot 3,04\sigma = 6,08\sigma. \quad (1.55)$$

Мера Лебега множества B_p кратна стандартному отклонению σ . Как показывает рис. 1.7,б, такая мера неудобна для некоторых распределений, например для бимодальных и несвязанных, поскольку приводит к разрыву функции $p(b)$ – второе условие.

Второе условие. Множество B_a можно также ограничить условием, чтобы окрестность точки b^* содержала некоторую α - часть элементов все-

го множества B_a . Путем подбора значений $\varepsilon_H, \varepsilon_B > 0$, соответствующих условию

$$\int_{b^* - \varepsilon_H}^{b^* + \varepsilon_B} p_a(b) db \geq \alpha < 1 \quad (1.56)$$

или двум условиям

$$\int_{b^* - \varepsilon_H}^{b^*} p_a(b) db \geq \alpha/2, \quad \int_{b^*}^{b^* + \varepsilon_B} p_a(b) db \geq \alpha/2, \quad (1.57)$$

получается множество $B_\alpha \in B_a$. Мера Лебега множества B_α составляет

$$\mu(B_\alpha) = \varepsilon_H + \varepsilon_B = 2\varepsilon > 0, \quad (1.58)$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_H + \varepsilon_B)/2$.

В этом случае интервал 2ε называется *доверительным интервалом*, а α - доверительным уровнем. Графическая интерпретация доверительных интервалов показана на рис. 1.8.

Для нормального распределения интервал $2 \cdot 2\sigma$ содержит 95% элементов множества B_a , а интервал $2 \cdot 3\sigma$ - соответственно 99,7%.

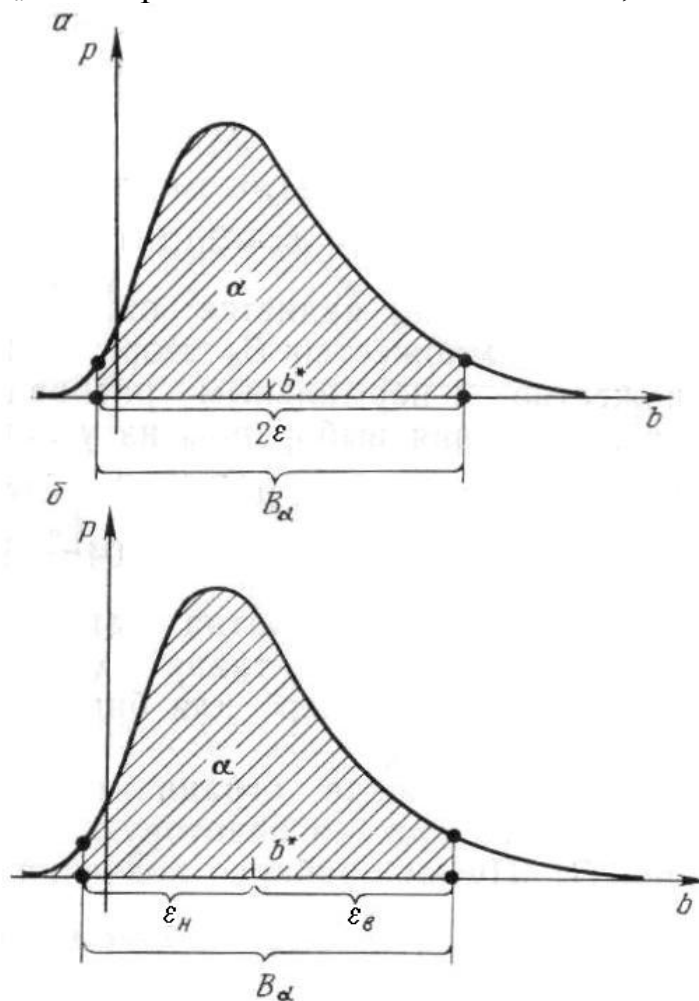


Рис. 1.8. Способы выделения множества B_α
а - из условия (1.56); б - из условия (1.57)

Встречается еще одна интервальная мера, а именно ширина распределения. Если нижний и верхний пределы множества B_a равны соответственно b_n и b_v , то ширина (разброс)

$$W = b_v - b_n > 0. \quad (1.59)$$

Ширина распределения в этом случае равна значению меры Лебега для множества B_a (1.45,в).

1.2.9. Энтропия

Третьим видом меры неоднозначности отображения $a \rightarrow B_a$ является энтропия (или негэнтропия), выражаемая формулой

$$H = - \sum_{i=1}^n [p_a(b_i) \ln p_a(b_i)] > 0 \quad (1.60a)$$

либо

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} [p_a(b) \ln p_a(b)] db > 0. \quad (1.60б)$$

Интересно, что возможно $H \notin B$, хотя энтропия выражается действительными числами. Это логарифмическая мера определенного интервала, длина которого зависит от распределения вероятности $p_a(b)$, а также от характеристик дисперсии распределения. Для множества с равномерным распределением (1.40) энтропия описывается выражением

$$H = \ln(b_v - b_n), \quad (1.61)$$

а энтропия множества с нормальным распределением составляет

$$H = \ln(\sqrt{2\pi e} \sigma) = 1/2 \ln(2\pi e) + \ln \sigma. \quad (1.62)$$

Энтропия является мерой упорядочения или неопределенности, используемой в термодинамике. Наибольшую неопределенность имеет множество с равномерным распределением.

Энтропию следует рассматривать как меру, позволяющую сравнивать два множества с различными распределениями вероятностей. Если два сравниваемых множества имеют распределения одного вида (например, нормальное или равномерное), то их можно сравнить через отношение параметров их функции вероятности.

Два множества с распределениями разного вида с точки зрения энтропии эквивалентны, если их энтропии равны. Эквивалентность либо упорядоченность множества с позиций энтропии не имеет иного значения.

Итог

До сих пор говорилось об одноразовом акте познания состояния a данной характеристики. *Образом состояния a* является множество значений $B_a = \{b\}$, а также множество вероятностей $p_a(b)$, соответствующих условию (1.25) реализации значения b ; при этом в качестве наилучшего образа выбирается, по одному из возможных решающих правил (1.27), значение b^* . *Неоднозначность отображения* состояния a в значение b^* характеризует множество значений

$$\{b\} \neq b^*, \quad (1.63)$$

находящихся в окрестности точки b^* , либо, в соответствии с (1.36), множество состояний

$$A^* \neq a. \quad (1.64)$$

Исследование состояний материи и энергии ведется путем многократного осуществления познавательных актов. Отыскивается либо множество образов (в предположении, что данная характеристика сохраняет свое состояние a), либо множество прообразов состояний a , интерпретированных как различные множества $\{A^*\}$. Следовательно, существует возможность сравнения образов между собой в предположении, что состояние данной характеристики не меняется. Сравнить требуется значения b^* , а также распределения вероятности $p_a(b)$ либо иные меры неоднозначности образов. Сложность таких сравнений, пожалуй, не вызывает сомнений. Этой задачей занимается математическая статистика.

Контрольные вопросы к разделу 1

1. Какие формы познания существуют и чем они отличаются?
2. Назовите составляющие структуры познаваемого мира и его абстрактного отображения.
3. Что такое функция прямого и функция обратного отображения?
4. Какие основные соотношения характеристик физических величин вы знаете?
5. Чем отличаются основные и производные величины? Приведите примеры таких величин.
6. Чем отличаются эмпирические шкалы физических величин от метрических?
7. Какие виды шкал вы знаете? В чем их различие?
8. Какой физической величиной определяется цвет?
9. Как задается метрическая шкала цвета? Опишите метод смешения цветов.
10. Для чего была введена характеристика цвета «яркость»?

11. В чем отличие проблемы расширения метрической системы в областях естественного и гуманитарного знания?
12. В чем заключается неоднозначность прямого и обратного отображения?
13. Какие правила выбора наилучшего решения вы знаете?
14. Какие способы, характеризующие неопределенность отображения, вы знаете?
15. Что такое мера множества?
16. Для чего предназначены интервальные меры?
17. Как энтропия характеризует неопределенность отображения?

2. ЭТАЛОНЫ И ИХ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ

2.1. Установление эталонов единиц измерения

Первым определил единицы измерения электрических величин Гаусс; он сделал это с помощью механических величин в системе СГС. Для установления взаимосвязи электрических и магнитных единиц измерения необходимо было внести в перечень основных единиц электрическую величину. За основную единицу измерения электрических величин в 1881 г. был принят 1 ампер, определяемый по-разному: а) с помощью 1 вольта и 1 ома; б) посредством закона Фарадея по величине массы серебра, выделяемого в процессе электролиза нитрата серебра; в) по величине силы, с которой взаимодействуют два проводника, если в них протекает ток. Это была система МКСА единиц измерения.

Поиски эталона единиц измерения электрических величин ведутся издавна. Применялись, в частности, следующие эталоны:

1860 г. Эталон сопротивления, предложенный Сименсом.

Столбик ртути поперечным сечением 1 мм^2 и длиной 1 м при температуре 0°C . Применялся до 1911 г., в Германии — до 1948 г. (в 1898 г. длина столбика увеличена до 106,3 см).

1881 г. За основные единицы приняты ом и вольт, единица ампера определена с помощью вольта и ома; установлены эмпирические единицы (эталон) ома и ампера (ток величиной 1 А в течение 1 с вызывает выделение 1,11810 мг серебра при электролизе нитрата серебра).

1948 г. Генеральной конференцией мер и весов введена система единиц МКСА.

1960 г. Введена система единиц СИ.

1968 г. Эффект Джозефсона, открытый в 1962 г., использован для определения эталона напряжения.

1972 г. Международный комитет мер и весов принял константу

$$\Phi_0^{-1} = \frac{h}{2e}.$$

1977 г. Открыт квантовый эффект Холла.

1980 г. Создан МОП-транзистор на основе кремния, который использован в качестве эталона активного сопротивления, основанного на квантовом эффекте Холла.

Современное состояние:

— основная единица силы тока — ампер, воспроизводимый с помощью токовых весов с точностью $6 \cdot 10^{-6}$;

– новый эталон напряжения — контакт Джозефсона, точность 10^{-7} , номинальное значение, произвольно установленное Международным комитетом мер и весов (МКМВ), составляет $483,594000 \text{ МГц/мкВ}_{\text{МКМВ}}$.

Вначале для эталона напряжения была получена точность 10^{-7} — 10^{-8} , в настоящее время достигнута точность 10^{-9} , в перспективе ожидается 10^{-12} .

Новый эталон активного сопротивления на базе квантового эффекта Холла — полевой МОП-транзистор на основе кремния либо гетероструктура GaAs, AlGaAs, InGaAs, InP с активным сопротивлением

$$R_{H_i} = \frac{h}{ie^2}, i=1, 2, 3, \dots$$

Точность, подтвержденная экспериментально, составляет 10^{-7} — 10^{-8} . Достоинством квантового эффекта Холла является то, что он позволяет определить эталон через фундаментальные физические постоянные. В контакте Джозефсона значение напряжения зависит от частоты.

Наиболее стабильными считаются групповые эталоны, сохранение меры которых возможно в течение более длительного времени. *Групповой эталон* создается совокупностью отобранных эталонов, в которой с течением времени новые, более точные экземпляры заменяют экземпляры с большими отклонениями меры от среднего значения. Причем отбраковка элемента группового эталона осуществляется, если нестабильности его меры превышает заданную норму.

Состояние эталонов различных физических величин и условия их воспроизведения не одинаковы. Так, например, эталон массы существует издавна, и можно предположить, что возможности его воспроизведения близки к пределу. В измерениях длины радикальные изменения точности и возможностей воспроизведения произошли в результате замены предельного эталона эталоном, реализованным с помощью явлений на атомном уровне. Изменения такого рода происходят по мере прогресса науки.

2.2. Воспроизведение эталонов

2.2.1. Понятие эталонов и их свойства

При сравнении двух эталонов ω_1 и ω_2 заранее считается известным, что один из них первичен, а другой — вторичен. Мера первичного эталона переносится на вторичный эталон, которому приписывается и неизбежная ошибка сравнения. По этой причине эталоны одной и той же единицы измерения и одинакового значения меры образуют соответствующую иерархию — первичный эталон расположен в иерархии выше, а вторичный — ниже. Число уровней иерархии определяется соображениями практической. На самом низком уровне находятся рабочие средства измерения, а перед ними — контрольные. Передача меры эталонам сверху вниз в пределах

иерархии называется *эталонированием*¹. Поскольку при этом мера эталона при переходе на более низкие уровни иерархии распространяется все шире, для этого все чаще употребляется определение *пропагация эталонов*². На вторичный эталон переносится мера первичного, а из процесса сравнения устанавливается погрешность меры.

Рассмотрим пример, когда два сравниваемых эталона имеют приблизительно одинаковую меру. Первичный эталон ω_1 обладает *номинальной мерой* ω_{10} , установленной в момент T_{01} *времени эксплуатации* первичного эталона. *Неточность меры первичного эталона*

$$\Delta_1 = \omega_1 - \omega_{10} \quad (2.1)$$

описывает *нестационарный случайный процесс* $\{\Delta_1\}$:

$$\{\Delta_1(T)\} = g_1(T)\{\varepsilon_1\} + h_1(T), \quad (2.2)$$

где $g_1(T)$, $h_1(T)$ — функции времени, характеризующие соответственно случайную и систематическую составляющие, $\{\varepsilon_1\}$ — стационарный случайный процесс со средним значением, равным нулю, с единичной дисперсией и корреляционной функцией

$$K_g(\tau) = E[\{\varepsilon_1\}\{\varepsilon_{t+\tau}\}] = \rho(\tau), \quad (2.3a)$$

$$|\rho(\tau)| \leq 1. \quad (2.3b)$$

Здесь $E[\]$ — математическое ожидание, T — время эксплуатации эталона, t — текущее время, $t \in T$.

По понятным соображениям номинальная мера эталона в момент T_{01} устанавливается так, чтобы эталон не был отягощен систематической погрешностью. Поскольку в процессе эксплуатации номинальное значение эталона может измениться на величину $h_{01}(T)$, которое по результатам исследований в период $T < T_{01}$ можно прогнозировать на время $T > T_{01}$ то

$$\omega_{01}(T) = \omega_{10}(T_{01}) - h_{10}(T), \quad (2.4)$$

где $h_{10}(T)$ — *прогноз систематической погрешности*. В дальнейшем для упрощения уравнения (2.1), (2.4) будем записывать так, что:

$$1. \Delta_1(T) = \omega_1(T) - \omega_{10}(T) \quad (2.5)$$

2. Систематическая погрешность $h_1(T)$, в уравнении (2.2) не включает составляющую с известным значением $h_{10}(T)$. Погрешность $h_1(T)$ по природе систематическая, но ее значение неизвестно. Источниками этой по-

¹ Этим термином обобщенно определяются все процедуры передачи меры сверху вниз по ступеням иерархии средств измерения. В таком случае частной процедуре эталонирования при передаче меры от предыдущего уровня к последующему по иерархии средств измерения соответствует термин «калибровка».

² От лат. propagate — распространять; этот термин используется в биологии для обозначения понятия «размножение». — *Прим, перев.*

³ Это значит, что в качестве номинальной принимается мера эталона, скорректированная по (2.4).

грешности являются: систематическая погрешность вышестоящего эталона, по которому установлена мера ω_{10} ; погрешности процесса сравнения при установлении меры эталона; погрешность учета составляющей $h_{10}(T)$ (ошибка прогноза). Процесс возникновения этой погрешности будет рассмотрен позднее, при установлении меры вторичного эталона.

Систематическая погрешность $h_1(T)$ имеет следующие свойства:

а) постоянное значение

$$h_1(T) = h_1(T + \Delta T) \quad (2.6a)$$

в период использования эталона для калибровки вторичного эталона;

б) вероятность реализации значения h выражается плотностью вероятности

$$p_h(h); \quad (2.6б)$$

в) значение

$$h_1 = \int_{-\infty}^{\infty} h p_h(h) dh; \quad (2.6в)$$

г) значение систематической погрешности изменяется по времени T вследствие, например, старения эталона, зависимости от T доверительного интервала прогноза и т. д.;

д) значение h_1 неизвестно, т. е. его нельзя вводить в качестве поправки в меру эталона;

е) h_1 можно рассматривать как случайную погрешность, снижающую достоверность меры эталона.

Случайная по природе погрешность эталона, обозначенная $g_1(\varepsilon_1)$, определяется внутренними свойствами эталона, такими как осцилляция и флуктуация; при этом стандартное отклонение g_1 зависит от времени T ввиду изменений свойств эталона. Эта погрешность имеет распределение

$$p_\varepsilon(\varepsilon). \quad (2.7)$$

Аналогичным образом описывается *неточность меры вторичного эталона:*

$$\Delta_2 = \omega_2 - \omega_{20}; \quad (2.8a)$$

$$\{\Delta_2\} = g_2(T)\{\varepsilon_2\} + h_2(T). \quad (2.8б)$$

Сравнение эталонов производится в момент T , по-разному расположенный на шкале времени эксплуатации каждого из образцов; например, если требуется установить меру вторичного эталона, то

$$T_1 > T_0, \quad T_2 < T_0, \quad (2.9a)$$

а если это периодическая поверка, то

$$T_1 > T_0, \quad T_2 > T_0, \quad (2.9б)$$

где T_0 обозначает момент установления номинального значения эталона, T_1 — время сравнения эталона ω_1 , T_2 — время сравнения эталона ω_2 .

Сравнение эталонов осуществляется с помощью компаратора (см. рис. 2.1). Показание компаратора обозначено символом y ; при этом истинное значение показания y_0 описывается выражением

$$y_0 = \omega_2 - \omega_1, \quad (2.10)$$

и оно неизвестно.

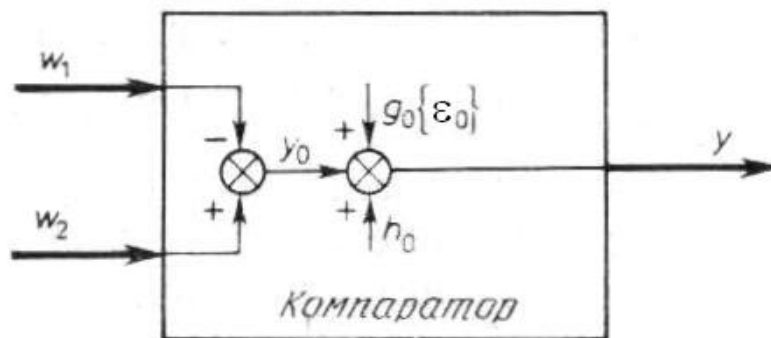


Рис. 2.1. Схемы сравнения двух эталонов с помощью компаратора для определения меры вторичного эталона

Компаратор вносит погрешность сравнения

$$\Delta = y - y_0, \quad (2.11)$$

которую можно моделировать выражением (2.2), т. е.

$$\{\Delta\} = g_0 \{\varepsilon_0\} + h_0. \quad (2.12)$$

Поскольку мы рассматриваем случай передачи меры вторичному эталону, результат сравнения (уравнение измерения) имеет вид¹:

$$\omega_2 = \omega_1 + y \quad (2.13)$$

2.2.2. Одноразовое сравнение

Случайные погрешности возникают в результате случайной реализации. После подстановки в уравнение измерения (2.13) выражений (2.1), (2.2), (2.8) и (2.12) получается

$$\omega_2 + g_2 \varepsilon_2 + h_2 = \omega_{20} + g_1 \varepsilon_1 + h_1 + y_0 + g_0 \varepsilon_0 + h_0. \quad (2.14)$$

Мера вторичного эталона может быть установлена на основе известных членов уравнения (2.14), к которым относится ω_{10} , а также $y = y_0 + g_0 \varepsilon_0 + h_0$, таким образом,

$$\omega_{20} = \omega_{10} + y = \omega_{10} + y_0 + g_0 \varepsilon_0 + h_0. \quad (2.15)$$

Правильный результат должен быть следующим:

$$\omega_{20}^* = \omega_{10} + y_0, \quad (2.16)$$

а это означает, что выявленная мера вторичного эталона отягощена погрешностью компаратора.

¹ При контрольном сравнении двух эталонов (2.9б) получаем $y = \omega_2 - \omega_1$

Уравнение погрешностей получается после вычитания из уравнения (2.14) истинного значения, т. е. уравнения (2.16):

$$g_2 \varepsilon_2 + h_2 = g_1 \varepsilon_1 + h_1 + g_0 \varepsilon_0 + h_0. \quad (2.17)$$

Поскольку в уравнении (2.17) все члены являются одноразовыми реализациями случайных процессов, то они имеют постоянные значения, и $E(x) = x$. Определяемая по уравнению (2.17) величина *систематической погрешности* вторичного эталона описывается выражением¹ (рис. 2.2)

$$h_2 = h_1 + g_1 \varepsilon_1 - g_2 \varepsilon_2 + g_0 \varepsilon_0 + h_0. \quad (2.18)$$

Принимая во внимание свойства источников погрешностей — членов выражения (2.18), можно определить значение математического ожидания и дисперсии систематической погрешности вторичного эталона, а именно:

$$E(h_2) = E(h_1) + g_1 E(\varepsilon_1) - g_2 E(\varepsilon_2) + g_0 E(\varepsilon_0) + E(h_0) = \bar{h}_1 + \bar{h}_0, \quad (2.19)$$

поскольку предполагалось, что средние значения процессов $\{\varepsilon\}$ равны нулю, а также

$$\text{var}(h_2) = \text{var}(h_1) + \text{var}(h_0) + g_1^2 + g_2^2 + g_0^2. \quad (2.20)$$

Эти результаты требуют комментария. Значение систематической погрешности h_1 в первичном эталоне является элементом множества систематических погрешностей, соответствующих другим эталонам. Значение математического ожидания множества систематических погрешностей обычно близко к нулю (симметричная функция $p(h_1)$), но не всегда. Дисперсия h_1 также является характеристикой множества погрешностей эталонов одинакового типа. Подобным же образом h_0 и $\text{var } h_0$ характеризуют множество компараторов одного типа в одинаковых условиях, одного времени эксплуатации и для того же самого значения показания y .

Результат оценки дисперсии содержит в качестве составляющей дисперсию случайной погрешности вторичного эталона. Это естественно, так как в процессе сравнения эта погрешность возникла и учтена в определении погрешности. Выражение (2.18), представляющее собой сумму случайных процессов, пригодно для установления распределения вероятности погрешности, по природе систематической, но неизвестного значения, поскольку в соответствии с допущениями (2.6) распределения этих ошибок в принципе известны. Следовательно, при заданном доверительном уровне можно определить *интервал недоуверности* меры эталона.

Кроме названной *недоуверности* меры вторичный эталон при его использовании вносит случайную погрешность

$$\{\Delta_{2p}\} = g_2 \{\varepsilon_2\}, \quad (2.21)$$

вследствие чего дисперсия недоуверности меры эталона составляет

$$\begin{aligned} \text{var}(\omega_2) &= \text{var}\{\Delta_2\} = \text{var}(h_2) + \text{var}[g_2 \{\varepsilon_2\}] = \text{var}(h_2) + g_2^2 = \\ &= \text{var}(h_1) + \text{var}(h_0) + g_1^2 + 2g_2^2 + g_0^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

¹ Значение g_2 измеряется другим независимым методом.

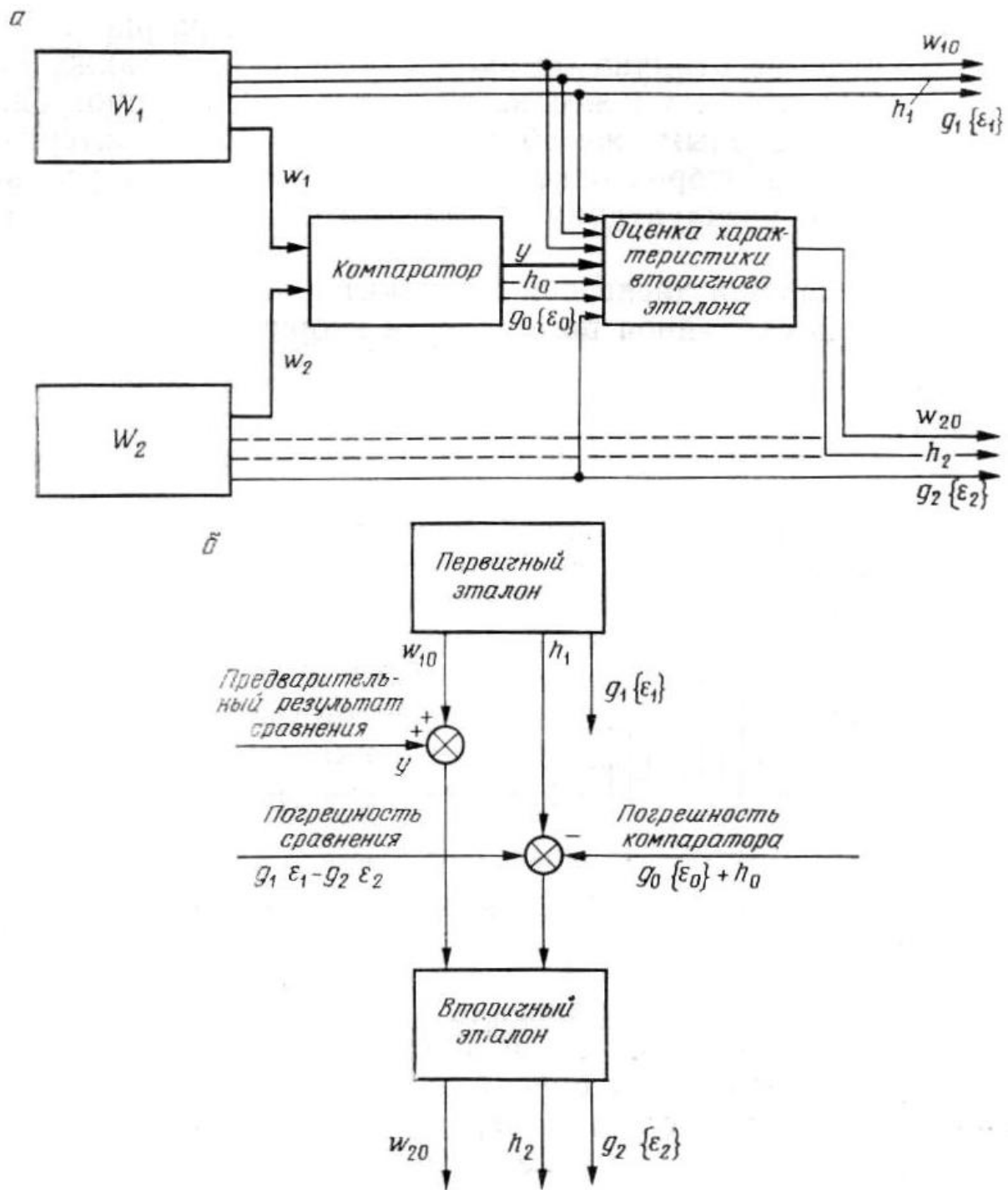


Рис. 2.2. Схема распространения меры и погрешности первичного эталона на вторичный: а — процесс оценки; б — составляющие меры и погрешности

Поскольку дисперсия ошибки первичного эталона равна

$$\text{var}(\omega_1) = \text{var}\{\Delta_1\} = \text{var}(h_1) + g_1^2, \quad (2.23)$$

то из сравнения дисперсий (2.22), (2.23) следует

$$\text{var}(\omega_2) - \text{var}(\omega_1) = \text{var}(h_0) + g_0^2 + 2g_2^2 > 0, \quad (2.24)$$

т. е. неточность меры вторичного эталона больше неточности первичного эталона. Это иллюстрирует рис. 2.2. Кроме того, мера вторичного эталона должна включать величину погрешности компаратора.

2.2.3. n -кратное сравнение с одним и тем же первичным эталоном

Если сравнение производится в интервале времени $\tau > \tau_{\text{нач}}$, для которого $\rho_1(\tau) = \rho_2(\tau) = \rho_0(\tau) = 0$, но $h_1(T + \tau) = h_1(\tau)$ и аналогично для h_2 , g_2 , h_0 , g_0 , причем в качестве результатов сравнения берутся средние значения ω_1 , ω_2 , y , то вместо (2.14) получается n уравнений для последовательных реализаций случайных процессов $\{\varepsilon_1\}$, $\{\varepsilon_2\}$, $\{\varepsilon_0\}$:

$$\begin{aligned}\omega'_{20} + g_2 \varepsilon_{21} + h'_2 &= \omega_{10} + g_1 \varepsilon_{11} + h_1 + y_{01} + g_0 \varepsilon_{01} + h_0, \dots \\ \omega'_{20} + g_2 \varepsilon_{2n} + h'_2 &= \omega_{10} + g_1 \varepsilon_{1n} + h_1 + y_{0n} + g_0 \varepsilon_{0n} + h_0.\end{aligned}\quad (2.25)$$

После суммирования и деления на n получаем

$$\omega'_{20} + g_2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{2i} + h'_2 = \omega_{10} + g_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{1i} + h_1 + g_0 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{0i} + h_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{0i}. \quad (2.26)$$

Номинальное значение вторичного эталона не точно такое же, поскольку

$$\omega'_{20} = \omega_{10} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \omega_{10} + g_0 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{0i} + h_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{0i}, \quad (2.27)$$

а для $n \rightarrow \infty$

$$\omega'_{20} = \omega_{10} + \bar{y}_0 + h_0. \quad (2.28)$$

Систематическая погрешность после вычитания из уравнения (2.26) истинного значения составляет

$$h'_2 = g_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{1i} + h_1 - g_2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{2i} + g_0 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{0i} + h_0. \quad (2.29)$$

Она имеет значение оценки математического ожидания

$$E(h'_2) = \bar{h}_1 + \bar{h}_0, \quad (2.30)$$

а также дисперсию, меньшую, чем при одноразовом сравнении, а именно:

$$\text{var}(h'_2) = \text{var}(h_1) + \text{var}(h_0) + \frac{1}{n} (g_1^2 + g_2^2 + g_0^2). \quad (2.31)$$

Погрешность, случайная по природе, составляет $g_2 \{\varepsilon_2\}$; значит, дисперсия *недостовренности меры вторичного эталона* равна

$$\text{var}(\Delta_2) = \text{var}(h_1) + \text{var}(h_0) + \frac{1}{n} (g_1^2 + g_0^2) + \frac{n+1}{n} g_2^2. \quad (2.32)$$

Подставим в формулу (2.86), определяющую неточность вторичного эталона, выражение (2.29) и рассмотрим полученный результат. Погрешность представляет собой сумму $3n+1$ составляющих, являющихся независимыми реализациями случайных процессов. В зависимости от числа

m -кратной реализации случайной погрешности ее значение также уменьшается $\sqrt{m}$ -кратно.

2.2.5. Вторичный элемент, имеющий m -кратную меру¹

Пусть первичные эталоны имеют меру

$$\omega_{1j} = \frac{\omega_2}{m}, \quad (2.39)$$

а также метрологические качества, характеризуемые погрешностью

$$\{\Delta_{1j}\} = g_{1j}\{\varepsilon_{1j}\} + h_{1j}, \quad (2.40)$$

составляющие которой означают то же, что и в (2.2). Метрологические качества эталона ω_2 определяет уравнение (2.8б), а компаратора — (2.12).

Из сравнения

$$\omega_2 = \sum_{j=1}^m \omega_{1j} + y \quad (2.41)$$

следует, что

$$\omega_{20} + g_2\varepsilon_2 + h_2 = \sum_{j=1}^m \omega_{10j} + \sum_{j=1}^m (g_{1j}\varepsilon_{1j}) + \sum_{j=1}^m h_{1j} + y_0 + g_0\varepsilon_0 + h_0. \quad (2.42)$$

Номинальная мера вторичного эталона равна

$$\omega_{20} = \sum_{j=1}^n \omega_{10j} + y = \sum_{j=1}^m \omega_{10j} + y_0 + g_0\varepsilon_0 + h_0. \quad (2.43)$$

Неизвестная по величине систематическая погрешность описывается выражением

$$h_2 = \sum_{j=1}^m h_{1j} + \sum_{j=1}^m (g_{1j}\varepsilon_{1j}) - g_2\varepsilon_2 + g_0\varepsilon_0 + h_0. \quad (2.44)$$

а случайная погрешность — выражением $g_2\{\varepsilon_2\}$. Если первичные эталоны одного и того же типа и выполняется условие

$$\bar{g}_{1j} = \bar{g}_1; \bar{h}_{1j} = \bar{h}_1 \text{ для } 1, \dots, m, \quad (2.45)$$

т. е. погрешности принадлежат к той же совокупности, а также

¹ Обычно отношение мер двух эталонов выражается натуральным числом. Возможны два пути:

1. Используется *метод сравнения* (компаративный) со значением $K=n$ либо $k=\min$ (метод совпадения), т. е. $n\omega_{20} = m\omega_{10}$ где m, n — натуральные числа.

2. Первичный эталон сравнивается с n одинаковыми вторичными эталонами, для которых $\omega_{10} = n\omega_{20}$, либо m одинаковых первичных эталонов сравниваются с одним вторичным эталоном, для которых $m\omega_{10} \approx \omega_{20}$.

При этом пользуются физически реализованными операциями деления или объединения состояний величины. Эти операции реализованы для значительного числа физических величин в соответствии со свойствами метрических шкал.

$$\bar{g}_2 / \bar{g}_1 \approx \bar{h}_2 / \bar{h}_1 \approx \omega_2 / \omega_1 \approx m, \quad (2.46)$$

то

$$E(h_2) = \sum_{j=1}^m \bar{h}_{1j} + \bar{h}_0 = m\bar{h}_1 + h_0 = \bar{h}'_1 + h_0 \quad (2.47)$$

и

$$\begin{aligned} \text{var}(h_2) &= mg_1^2 + m \text{var}(h_1) + g_2^2 + \text{var}(h_0) = \frac{1}{m} [m^2 g_1^2 + m^2 \text{var}(h_1)] + \\ &+ g_2^2 + g_0^2 + \text{var}(h_0) = \frac{1}{m} [g_1'^2 + \text{var}(h'_1)] + g_2^2 + g_0^2 + \text{var}(h_0), \end{aligned} \quad (2.48)$$

где $\bar{h}'_1 = m\bar{h}_1$, $g'_1 = mg_1$; $\text{var}(h'_1) = m^2 \text{var}(h_1)$.

Приведенные выше результаты можно интерпретировать следующим образом: если относительные погрешности первичных и вторичного эталонов близки, т. е. абсолютные погрешности разнятся m -кратно (2.46), то ожидаемое значение систематической погрешности вторичного эталона равно сумме ожидаемых значений погрешностей первичных эталонов (2.47). Весьма благоприятен случай $\bar{h}_1 = 0$. Дисперсия же погрешности первичных эталонов (по природе систематической, но малозначимой), перенесенной на вторичный эталон, уменьшается m -кратно (первый член в правой части формулы (2.48)). Если, например, предельная недостоверность m первичных эталонов ($m=10$) составляет 0,01%, то она составляет $0,01/\sqrt{10} = 0,003\%$ в недостоверности вторичного эталона, т. е. возникает эффект получения более высокой, чем для первичных, точности вторичного эталона. Этот эффект получается при $\bar{h}_{1j} = 0$, а это условие очень трудно выполнить. В других случаях эффект меньше, как это иллюстрирует рис. 2.3.

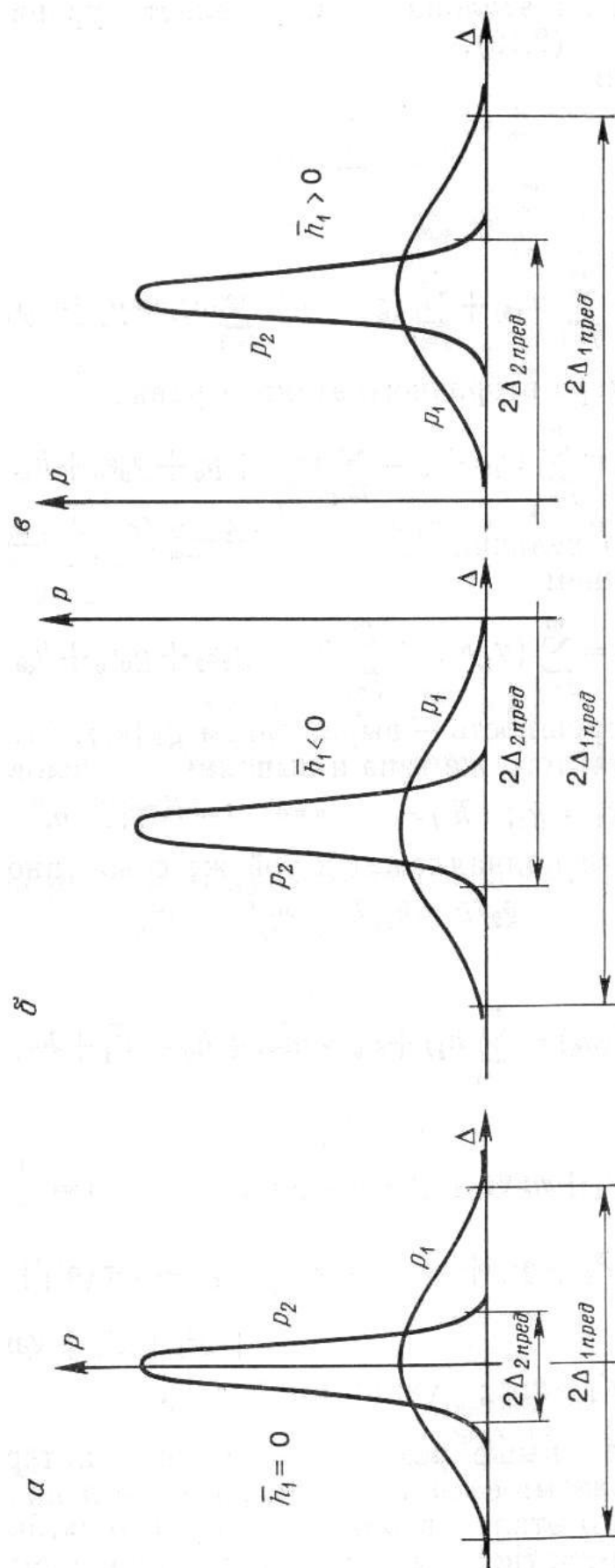


Рис. 2.3. Влияние систематической погрешности первичного эталона на погрешность вторичного эталона

2.2.6. Вторичный эталон, имеющий 1/ m -кратную меру

Мера вторичных эталонов выражается соотношением

$$\omega_{2j}m \approx \omega_1. \quad (2.49)$$

Процедура сравнения здесь гораздо сложнее, так как надо определить: 1) m номинальных значений мер вторичных эталонов и 2) m оценок достоверности меры, 3) как минимум, необходимо выполнить m независимых сравнений, чтобы получить m независимых уравнений для расчета. С позиций условия (2.49) необходимо сравнение, описываемое уравнением измерения

$$\sum_{j=1}^m \omega_{2j} = \omega_1 + y_1, \quad (2.50)$$

а также $m-1$ других сравнений. На рис. 2.4 представлены примерные схемы сравнения.

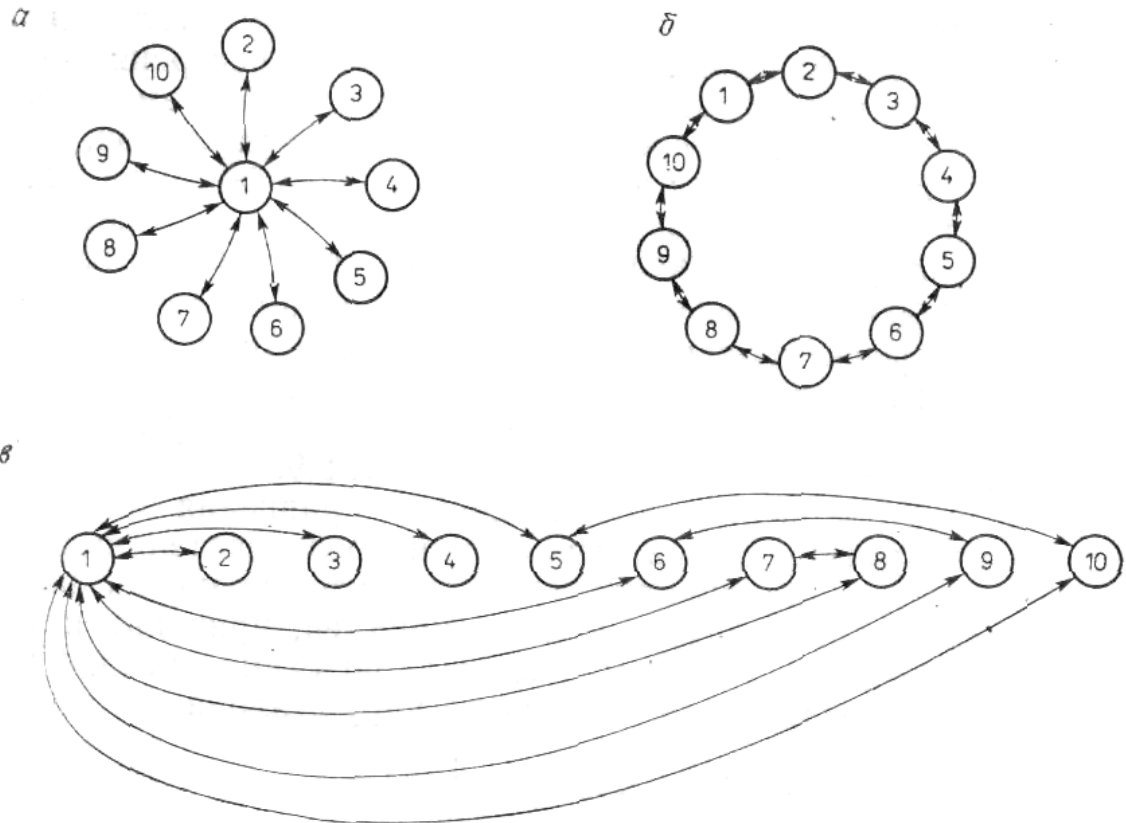


Рис. 2.4. Схемы сравнения для определения меры m вторичных эталонов: а – относительно первого эталона; б – поочередное сравнение эталонов; в – комбинация сравнений

Для схемы рис. 2.4,а, по которой каждый из вторичных эталонов сравнивается со вторичным эталоном под номером $j=1$, составляется система уравнений

$$\omega_{21} = \omega_{2j} + y_j \quad (2.51)$$

для $j = 2, 3, \dots, m$.

Во избежание излишних математических преобразований для различения отдельных реализаций случайных погрешностей эталона ω_{21} вводится индекс i ($i = 1, \dots, m$), означающий номер сравнения. Сравнение $i = 1$ по уравнению (2.50) можно описать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m \omega_{20j} + \sum_{j=1}^m g_{2j} \varepsilon_{2j} + \sum_{j=1}^m h_{2j} = \omega_{10} + g_1 \varepsilon_1 + h_1 + y_{01} + g_{01} \varepsilon_{01} + h_{01}; \quad (2.52)$$

$m-1$ уравнений, описывающих сравнения $j=2, 3, \dots, m$, получаются из (2.51) в виде

$$\omega_{20j} + g_{2j} \varepsilon_{2ji} + h_{2ji} = \omega_{201} + g_{21} \varepsilon_{21i} + h_{21} - y_{0i} - g_{0i} \varepsilon_{0i} - h_{0i}. \quad (2.53)$$

После подстановки $m-1$ уравнений типа (2.53), разрешенных относительно ω_{20j} , в (2.52) получается

$$\begin{aligned} m\omega_{20j} + g_{21} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{21i} + mh_{21} + \sum_{j=2}^m (g_{2j} \varepsilon_{2j1}) - \sum_{j=2}^m (g_{2i} \varepsilon_{2ji}) + \sum_{j=2}^m h_{2j1} - \sum_{j=2}^m h_{2ji} = \\ = \omega_{10} + g_1 \varepsilon_1 + h_1 + \sum_{i=1}^m (y_{0i} + g_{0i} \varepsilon_{0i} + h_{0i}). \end{aligned} \quad (2.54)$$

С учетом принятых свойств систематической погрешности получаем $h_{2ji} = h_{2j}$, $h_{21i} = h_{21}$, а также для $i = 2, 3, \dots, m$ имеем $h_{0i} = h_0$, $g_{0i} = g_0$. Два последних члена в левой части сокращаются. Номинальная мера эталона ω_{21} определяется выражением

$$\omega_{201} = \frac{1}{m} \omega_{10} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i = \frac{1}{m} \left[\omega_{10} + \sum_{i=1}^m y_{0i} + g_{01} \varepsilon_{01} + h_{01} + g_0 \sum_{i=2}^m \varepsilon_{0i} + (m-1)h_0 \right], \quad (2.55)$$

а истинное значение — выражением

$$\omega^*_{201} = \frac{1}{m} \omega_{10} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{i0}. \quad (2.56)$$

В формуле (2.55) учтено, что в первом измерении сравниваются значения ω_1 , а в остальных измерениях — значения ω_2 , в m раз меньшие, для которых качества компаратора иные: h_{01} и h_0 , g_{01} и g_0 . Систематическая погрешность h_{21} получается после вычитания из уравнения (2.54) истинного значения (2.56):

$$\begin{aligned} h_{21} = \frac{1}{m} \left[h_i + g_1 \varepsilon_1 + g_{01} \varepsilon_{01} + h_{01} + \sum_{i=2}^m (g_0 \varepsilon_{0i}) + (m-1)h_0 + \sum_{i=j=2}^m (g_{2j} \varepsilon_{2ji}) - \sum_{j=1}^m (g_{2j} \varepsilon_{2j1}) - \right. \\ \left. - g_{21} \sum_{i=2}^m \varepsilon_{21i} \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ожидаемое значение систематической погрешности описывается выражением

$$E(h_{21}) = \frac{1}{m} \bar{h}_1 + \frac{1}{m} \bar{h}_{01} + \frac{m-1}{m} \bar{h}_0 = \bar{h}_{21}, \quad (2.58)$$

а дисперсия — выражением

$$\begin{aligned} \text{var}(h_{21}) = & \frac{1}{m^2} [\text{var}(h_1) + \text{var}(h_{01}) + (m-1)^2 \text{var}(h_0) + (m-1)g_0^2 + \\ & + g_{01}^2 + g_1^2 + (3m-2)g_2^2]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Параметры эталонов $\omega_{22}, \omega_{23}, \dots, \omega_{2m}$ вычисляются по уравнению (2.53) так же, как в разд. 2.2.2, поскольку выступающие там свойства эталона ω_{21} уже определены ранее.

Для $j = 2, 3, \dots, m$ имеем

$$\omega_{20j} = \omega_{201} - y_j \quad (2.60)$$

и

$$h_{2j} = h_{21} - h_0 + g_{21}\varepsilon_{21i} - g_{2j}\varepsilon_{2ji} - g_0\varepsilon_{0i}. \quad (2.61)$$

Отсюда

$$E(h_{2j}) = \bar{h}_{21} - \bar{h}_0 \quad (2.62a)$$

и

$$\text{var}(h_{2j}) = \text{var}(h_{21}) + \text{var}(h_0) + 2g_2^2 + g_0^2, \quad (2.62b)$$

где $\bar{h}_{21}$ и $\text{var}(h_{21})$ выражаются соответственно формулами (2.58) и (2.59). Кроме того,

$$\text{var}(\Delta_{2j}) = \text{var}(h_{21}) + \text{var}(h_0) + 3g_2^2 + g_0^2. \quad (2.63)$$

Примененная *схема сравнений* позволяет улучшить качество вторичного эталона ω_{21} , так как неточность этого эталона становится меньше на значение случайной погрешности сравниваемых вторичных эталонов и компаратора при одноразовом сравнении.

Анализ уравнения (2.59) показывает, что в неточности вторичного эталона большую долю занимают случайные погрешности, возникающие при каждом сравнении. Поэтому вторичным эталоном № 1 должен быть эталон с наименьшим значением g_2 . Многократное выполнение сравнений по той же самой схеме уменьшает долю случайных погрешностей в пропорции, которую можно определить из числа сравнений.

Для определения меры вторичного эталона можно использовать также схемы сравнения, приведенные на рис. 2.4, б, в. Если схема содержит $n > m$ сравнений произвольной структуры, повышается точность определения меры вторичных эталонов и их погрешностей.

С рассмотренной задачей связано сравнение эталонов группы между собой. Известно, что такое внутригрупповое сравнение не позволяет оценить изменение меры группового эталона, но позволяет дать оценку изменению меры отдельного эталона относительно групповой меры. Такой ин-

формации достаточно для контроля элементов группового эталона и исключения тех элементов, мера которых отклоняется от средней. На практике предпочитают схему, по которой все элементы сравниваются друг с другом. Такая схема позволяет получить симметричные и легко вычисляемые результаты.

2.2.7. Схема иерархии эталонов

Из представленных способов переноса меры первичного эталона на вторичный следует, что можно, исходя из одного эталона, создать *систему эталонов* с различными значениями и неточностями установленной меры, соответствующими способам ее определения. Примерная схема системы эталонов одной величины, для которой применен способ разделения и объединения, рассмотренный в разд. 2.2.5 и 2.2.6, представлена на рис. 2.5. Это упрощенная схема; например, на каждом уровне иерархии показано по одному эталону, тогда как *государственный эталон* состоит из нескольких экземпляров эталонов: а) основной эталон; б) эталон сравнения; в) эталон-свидетель; г) эталон соотнесения (рабочий). Кроме того, в ней не учтены физические ограничения, другие способы сравнения и т. п. Такую структуру системы эталонов имеют величины, аддитивные по природе.

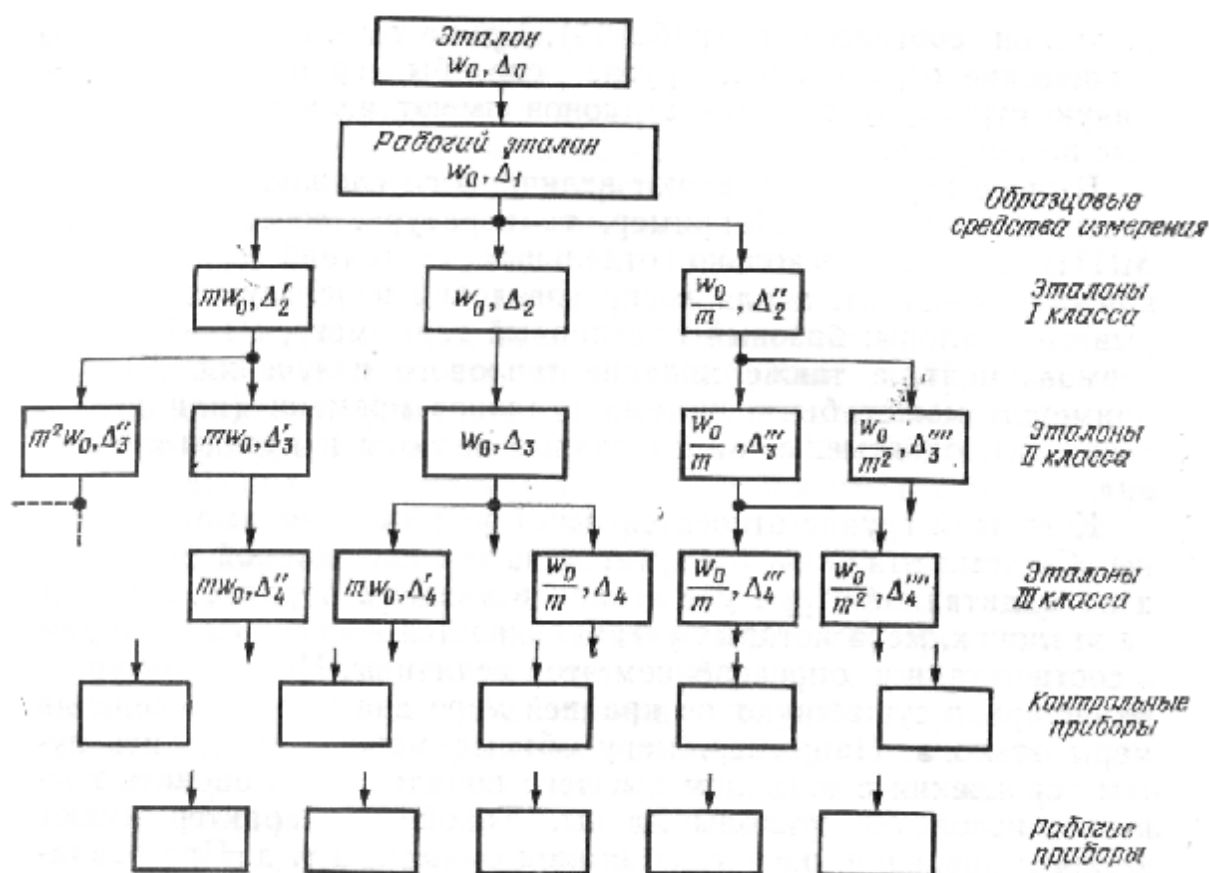


Рис. 2.5. Примерная схема иерархии эталонов

Вторую группу составляют величины со сложной структурой системы эталонов. Например, температура, соответствующая МПТШ¹, имеет несколько отдельных состояний сравнения в качестве констант, а для воспроизведения используются непрерывные эталоны: базовый платиновый термометр, РТ—Rh—РТ-термоэлемент, а также явление теплового излучения.

К третьей группе относятся некоторые производные величины. Система эталонов базируется на эталоне данной величины и на аддитивной структуре эталонов низшего порядка, а также на эталонах, мера которых устанавливается косвенным методом в соответствии с определением этой величины. На данном уровне иерархии существуют по крайней мере два пути определения меры эталона. Например, меру объема можно определить путем сравнения с эталоном высшего порядка либо оценить косвенно, используя эталоны длины. Такой же характер имеют эталоны давления, расчетный эталон емкости и т. д. При реализации выбранных состояний сравнения появляются различные физические и технические ограничения.

Разработка реальной иерархической структуры эталонов представляет собой сложную задачу ввиду трудности формулирования критерия оптимизации. Чаще всего ставится вопрос о соотношении мер неточности эталонов на соседних уровнях иерархии, а также связанный с этим вопрос о числе ступеней иерархии. На первый вопрос можно ответить с помощью выведенных выше формул, если известно соотношение систематической и случайной погрешностей. Например, для соотношения этих погрешностей 1:1, а также для пренебрежимо малых погрешностей компаратора из уравнения (2.32) следует, что отношение дисперсий

$$\frac{\text{var } \Delta_2}{\text{var } \Delta_1} = \frac{\left[\text{var } h_1 + \text{var } h_0 + \frac{1}{n}(g_1^2 + g_0^2) + \frac{n+1}{n}g_2^2 \right]}{\text{var } h_1 + g_1^2} \quad (2.64)$$

изменяется от 2 (для $n = 1$) до 1 (для $n \rightarrow \infty$), если $g_1 = g_2$.

В ином понимании погрешностей, зная частное от деления погрешностей, а также требования к точности рабочих средств измерения, можно определить число уровней иерархии. На основе установленной заранее допустимой меры риска можно также найти требуемое число уровней иерархии эталонов. Более конкретная задача может включать учет стоимости калибровки.

Сохранение единства мер и соответствия их международным соглашениям относится к государственным задачам и реализуется государственной администрацией и соответствующими учреждениями. Государст-

¹ Международная практическая температурная шкала.

венная служба мер хранит государственные эталоны, устанавливает систему эталонов, проводит сравнения и аттестации эталонов и т. д.

По мере необходимости потребитель, выполняющий измерения, подвергает измерительную аппаратуру аттестации или контролю по эталонам, входящим в государственную систему эталонов, и осуществляет, таким образом, привязку аппаратуры к международной системе эталонов.

2.3. Образцы материалов

2.3.1. Подобие характеристик

Формулирование образов действительности охватывает качественные и количественные явления. Качественный образ материи характеризуется следующими категориями: 1) частицы и кванты, из которых состоят атомные ядра и атомы; 2) соединения химических элементов; 3) различные смеси химических элементов и соединений; 4) органические вещества и биологические организмы; 5) макроскопические объекты; 6) явления взаимодействий материи в состоянии покоя или движения; 7) виды энергии и энергетических превращений; 8) явления, связанные с воздействием энергии на материю; 9) различные свойства материи и энергии, определяемые посредством физических величин.

Некоторые из качественных категорий легко различимы, другие различить трудно. Мерой различия *качественных категорий* является число физических свойств и состояний, в которых эти свойства могут находиться. Эти свойства, разумеется, должны быть наблюдаемы и измеримы. Качественным категориям, существующим в реальности, соответствуют образы в сфере абстракции, выраженные посредством названий и символов. Эти образы представляют собой взаимно-однозначное отображение действительности. Следовательно, данная качественная категория описывается числом N характеристик $Q_1, \dots, Q_N$ и числом N множеств состояний $\{q_1\}, \dots, \{q_N\}$ которые приобретают эти характеристики. По мере познания действительности число N увеличивается. Две категории A и B

$$A=A(Q_1, \dots, Q_i, \dots, Q_N, q_1, \dots, q_N), \quad (2.65a)$$

$$B=B(Q_1, \dots, Q_j, \dots, Q_M, q_1, \dots, q_M) \quad (2.65b)$$

различимы, если по крайней мере для одной из их совпадающих характеристик $Q_{iA} = Q_{jB}$ среди $i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M$ множества состояний раздельны, т.е. пересечение соответствующих множеств равно пустому множеству:

$$\{q_{iA}\} \cap \{q_{jB}\} = 0; Q_{iA} \equiv Q_{jB}. \quad (2.66)$$

Условие (2.66) может выполняться для большего числа характеристик, и тогда категории различаются проще. По понятным практическим соображениям для различения качественных категорий используются те харак-

теристики, удовлетворяющие условию (2.66), которые проще наблюдать и измерять.

В своей целенаправленной трудовой деятельности человек испытывает потребность в эталонах значительного числа качественных категорий для оценки качества материалов и изделий для рутинных и исследовательских операций. Эталонами, например материалов, служат соответствующим образом приготовленные *образцы материалов*. Из-за физико-химического воздействия среды, а также ввиду процессов старения, эти образцы имеют ограниченное постоянство; кроме того, часто измерение качественных характеристик вызывает износ образца. Следовательно, существует потребность производства образцов материалов для обновления состояния и восполнения изношенных образцов.

2.3.2. Виды образцов материалов. Качественная категория

Различают следующие виды образцов: а) аналитические образцы; б) образцы сверхчистых веществ; в) образцы физических свойств; г) образцы технических характеристик; д) биосферные образцы, например образцы для клинических лабораторий, образцы смесей пестицидов, биологические образцы и т. д.

Образцами материалов служат физические тела, воспроизводящие с определенной точностью те или иные конкретные свойства, достоверность которых официально установлена соответствующим компетентным учреждением. Однако, образцы материалов не обладают тем же рангом, что и эталоны единиц измерения. Причины этого следующие:

1. Качественная категория, которую воспроизводит эталон материала, определена с помощью измеримых характеристик и их состояний, для которых существуют эталоны единиц измерения.

2. Для установления качественной категории либо связанной с ней меры материального образца не требуется первичный материальный эталон, поскольку эту меру можно определить посредством измерений физических характеристик материала.

3. Образец материала воспроизводит соответствующую меру в ограниченном диапазоне признанных достоверными физических и химических свойств. Поэтому область применения образца ограничена той аппаратурой, с помощью которой осуществляется идентификация его эталонного свойства. Подобие образцов материалов и эталонов единиц измерения используется в следующих областях:

- а) способы выражения меры образца и неточности меры;
- б) распространение некоторых образцов материалов путем сравнения свойств первичного и вторичного образцов;
- в) цели и способы использования образцов, а также организация аттестации и официального утверждения.

Качественная категория образца материала выражается названием либо повсеместно принятыми символами, означающими химический состав материала.

2.3.3. Количественная характеристика материала. Мера образцов

Состояние количественной характеристики можно выразить в процентах либо частным от деления количественных состояний, например частным от деления массы на объем. Количественная характеристика определяется и измеряется абсолютным методом. *Мерой образца* является количественная характеристика материала, например плотность, мольная концентрация, модуль упругости, температура. Мера охватывает каждый вид компонента материала образца. Эта мера имеет такие же свойства, как и меры физических величин. Мера образца материала жестко ограничена балансом компонентов

$$\sum_{i=1}^n g_i = 1, \quad (2.67)$$

где g_i обозначает долю i -го компонента материала.

Неточность меры Δq_i можно моделировать с помощью нестационарного случайного процесса:

$$\{\Delta\} = g\{\varepsilon\} + h, \quad (2.68)$$

где g, h — функции аргументов, таких как размеры образца, время, температура и т. д., $\{\varepsilon\}$ — стационарный случайный процесс, описывающий погрешность меры образца по выбранным координатам, например координатам поверхности либо объема.

Случайный процесс $\{\varepsilon\}$ описывает неоднородность материала, а функции g, h — изменения неоднородности и меры образца. В результате диффузии, растворения материалов, окисления и т. д. погрешность меры образца во времени T изменяется.

Особенностью образцов материалов является малая, обычно игнорируемая доля случайной погрешности, выраженной составляющей $g\{\varepsilon\}$. Значение этой погрешности не всегда однозначно определено, так как при воспроизведении состояния образца активна определенная часть его поверхности или объема, а мера определяется средним значением в активной области.

Систематическая погрешность h содержит две составляющие: а) недостоверность номинальной меры образца (неизвестная по величине систематическая по природе ошибка); б) нестабильность, обусловленную старением образца.

Способы определения меры образца и ее неточности различаются в зависимости от рода образца и технологии его изготовления. Рассмотрим наиболее типичные примеры.

2.3.4. Образцовые газы

Образцовые газы, как образцы физических свойств, составляются посредством измерения: а) объема при постоянном давлении; б) давления при постоянном объеме; в) расхода компонент А, В, С, ... смеси и ее состава.

Компоненты смеси должны быть газами с известным химическим составом. Мерой образца являются объемные доли компонент в смеси, выраженные в процентах. Мера определяется в непосредственно измеряемых величинах:

$$X_A = (V_A/V) \cdot 100, \% A, \quad (2.69a)$$

либо

$$X_A = (P_A/P) \cdot 100, \quad (2.69б)$$

либо

$$X_A = \dot{V}_A / \dot{V}, \text{ и т. д.}, \quad (2.69в)$$

причем

$$V_A + V_B + V_C + \dots = V, \quad (2.70a)$$

$$P_A + P_B + P_C + \dots = P. \quad (2.70б)$$

Недостоверность меры образца определяется аналогично случаю косвенного измерения, погрешностями непосредственно измеренных величин, определяющих меру образца. При этом недостоверности непосредственно измеряемых величин известны. Источниками недостоверности меры являются: а) недостоверность непосредственно измеряемых величин; б) загрязнение компонентных газов; в) изменения температуры при измерении компонент; г) отклонения от известных законов при высоких давлениях; д) плохое перемешивание газов и расслоение смеси, если компоненты существенно различаются плотностью, е) конденсация газов и т. п.

Во многих случаях определение меры образца косвенным методом обеспечивает большую точность, чем непосредственное измерение состава аналитическими методами.

2.3.5. Образец электролита

Чаще всего образцом слабого электролита служит водный раствор хлористого калия. В отмеренный объем дистиллированной воды добавляется взвешенная масса KCl. Меру образца определяют по формуле

$$X = c = m/V, \text{ мг KCl/1H}_2\text{O}. \quad (2.71)$$

Недостоверность меры образца обуславливают следующие неопределенности:

а) недостоверность результатов непосредственного измерения массы и объема, поскольку уравнение, определяющее меру (2.71), имеет форму частного от деления, следовательно, относительные погрешности складываются:

$$\delta_c = \delta_m + \delta_v \quad (2.72)$$

б) недостоверность чистоты компонент,

в) нестабильность химического состава, вызванная растворением материала сосуда и газов из атмосферы (главным образом CO₂).

2.3.6. Определение меры образца на основании пробы.

Некоторые образцы получаются путем выплавки металла или сплава, число проб из одной плавки достигает N . Мера образца устанавливается на основе исследования $n \ll N$ проб. Выходной материал отличается некоторой неоднородностью состава и свойств в пространстве, обычно определяемом геометрическими координатами. Неоднородность описывается моделью (2.69), т. е. представляет собой многомерный нестационарный случайный процесс, а точность определяется столькими процессами, сколько свойств характеризует образец. Так, например, в случае сплава меру образца определяют m составляющих элементов и их концентрации, а пробы характеризуют m трехмерных процессов, причем эти процессы по природе коррелированы:

$$\{q_i\} = g_j(x, y, z)\{\varepsilon_j\} + h_j(x, y, z); \quad j=1, 2, \dots, m, \quad (2.73)$$

Стационарный процесс $\{\varepsilon_j\}$ описывает флуктуацию концентрации, например, вследствие плохого перемешивания составляющих, а функция h — различные расслоения в результате седиментации, выделения газа и т. д. перед затвердеванием сплава. Одна проба реализует процесс q_i геометрические размеры пробы ограничивают возможности наблюдения за процессом $\{\varepsilon_j\}$. Число реализаций зависит от предполагаемого характера функции h_i .

Мерой образца является среднее значение мер проб, скорректированное на величину интерполированного значения систематической неоднородности $\hat{h}$. Мерой недоверности служит сумма составляющей $g_j\{\varepsilon_j\}$, недоверности расчета функции $\hat{h}_j$ и погрешности измерения состояний характеристики g_j , т. е.

$$\{\Delta_p\} = g_j\{\varepsilon_j\} + \{\Delta h_j\} + \{\Delta q_j\}. \quad (2.74)$$

При суммировании этих процессов граница недоверности определяется как доверительный интервал при заданном доверительном уровне. Эта систематическая по природе, неизвестная по величине недоверность характеризует образец материала, являющийся единичной реализацией процесса $\{\Delta_j\}$. Расчет ожидаемого значения недоверности, а также дисперсии проводится по формулам типа (2.19), (2.20).

Для уменьшения недоверности меры пригодны следующие формы использования образцов, получаемых этим методом.

1. Выбор n образцов из одной партии и принятие в качестве результата средней для этих образцов величины. Соответственно в пропорции n уменьшается недоверность меры, вносимая первым и вторым членами, а также часть $g_q\{\varepsilon_q\}$ третьего члена правой части формулы (2.74). Однако член h_q не уменьшается. Средние значения первого и второго членов равны нулю, а $E\{\Delta q_j\} = h_q$.

2. Член h_q может быть уменьшен посредством использования m образцов, мера которых определена с помощью m составов измерительной аппаратуры, для которой $\hat{h}_q = 0$. Здесь имеется аналогия с эталонами, представленными в предыдущей главе в качестве примеров (разд. 2.2.2—2.2.6).

Образцы материалов играют в метрологии большую роль. Они не только упрощают измерения, но и нередко являются источниками стабильных, точно определенных состояний физических величин. Такие состояния часто определяются с использованием чистого материала (например, воды, чистых металлов) для воспроизведения температурных констант и т. д. Поэтому образцы материалов можно рассматривать как псевдоэталонные некоторых физических величин, т. е. псевдоэталонные меры.

Контрольные вопросы к разделу 2

1. Из каких соображений эталоны физических величин постоянно совершенствуются?
2. Что такое групповой эталон? В чем его достоинства?
3. Какие свойства эталонов вы знаете?
4. Что такое первичный и что такое вторичный эталон? Чем они отличаются?
5. Что такое номинальная мера эталона?
6. Чем определяются случайная и систематическая погрешности эталонов?
7. Какие свойства случайной и систематической погрешности вы знаете?
8. Что такое компаратор? Для чего он применяется?
9. В чем состоит одноразовое сравнение эталонов? Для чего сравниваются эталоны?
10. Для чего предназначено n -кратное сравнение с одним и тем же первичным эталоном?
11. Какая цель у m -кратного сравнения с разными первичными эталонами?
12. Вторичный элемент имеет m -кратную меру – что это означает?
13. Как сравниваются эталоны, когда вторичный элемент имеет $1/m$ -кратную меру?
14. Что такое иерархия эталонов, как она формируется?
15. Что такое образцы материалов, чем они отличаются от эталонов физических величин?
16. Что такое качественные категории и количественные характеристики образцов материалов? В чем их различие?
17. Какие виды образцов материалов вы знаете?

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

3.1. Общие принципы моделирования

Моделированием мы будем называть формулирование математической модели. Математическая модель дает приблизительное описание явлений, происходящих в измерительных системах (ИС). Вышеприведенное определение рассматривается как аксиома.

Математическая модель — это определение, которое расширяет понятие физического закона. Обнаружение явлений случайного характера привело к заключению о том, что связи между физическими величинами не вполне однозначны, а имеют стохастический характер. Уравнения, описывающие такие связи, — это не законы, а математические модели.

Различают моделирование сигналов и моделирование систем. В метрологии рассматриваются заданные и случайные сигналы. Они представляются в зависимости от времени и частоты.

Понятие *сигнала* обычно ассоциируется с физической величиной, являющейся носителем энергии. Сигналом может быть также величина, не являющаяся носителем энергии, но характеризующая состояние материи. Между моделями сигнала и измерительной системы существует определенная взаимосвязь; модель ИС устанавливает связи между сигналами.

ИС состоит из элементов двух родов:

1. Активные элементы, генерирующие физические величины, — носители энергии; эти элементы характеризуются одной, двумя либо большим числом физических величин.

Примеры активных элементов: электрические аккумуляторы; питатели; источники света электромагнитного и корпускулярного излучения; массы, находящиеся в гравитационном поле; сжатый воздух; усилители электрических сигналов, пневматических импульсов и т. д.

2. Пассивные элементы, свойства которых зависят от состояния материи и выражаются величинами, не являющимися носителями энергии.

Примеры пассивных элементов: механические конструктивные элементы, характеризующиеся размерами, массой, свойствами этих элементов; оптические элементы — фильтры, призмы, линзы, зеркала; электрические элементы — сопротивления, конденсаторы, катушки, молекулярные сита и т. д.

Если ИС построена из разнородных элементов, это затрудняет моделирование.

Моделирование в метрологии отличается от моделирования, применяемого в других науках, следующими факторами:

1. Специфична цель формулирования моделей, вызванная потребностью количественной оценки явлений и идентификации неизвестных свойств элементов.

2. Требуется значительно более высокая точность моделирования, для чего в ИС приходится использовать такие явления или элементы, модели которых известны достаточно точно.
3. Математическая модель ИС всегда определима, т. е. устройство с неизвестной моделью не может быть использовано как средство измерения.
4. Кроме самой модели в метрологии всегда определяется также ее точность.

Рассмотрение этих факторов удобнее начать с п.3 и п.4.

ИС как систему характеризуют входы и выходы. Входным сигналом является состояние измеряемой величины, вводимой в ИС. Входами служат также воздействующие величины, характеризующие условия работы ИС. Выходом является показание прибора либо состояние выходных величин, доступных органам чувств человека. В системной интерпретации различных явлений формулируются три задачи:

- 1) известны вход и модель системы — нужно определить выход;
- 2) известны вход и выход — нужно построить модель;
- 3) известны модель и выход — нужно определить вход.

Так вот, каждое измерение — это решение третьей задачи.

Для того чтобы на основе состояния выхода воссоздать состояние измеряемой входной величины, необходимо знать модель. Нас интересует модель типа «вход-выход ИС».

Для метрологии фундаментальным свойством является однозначность отображения, а также границы неоднозначности такого отображения. Это связано с целью формулирования модели и возможностью воспроизведения состояния входа.

Требование максимальной точности модели ИС объясняется тем соображением, что ИС используются для идентификации моделей других устройств и изучения различных явлений. Погрешность модели ИС увеличивает недоверие к модели исследуемого явления. В метрологии используются явления, которые описываются с точностью до 10^{-2} – 10^{-6} , а в случае некоторых величин и эталонов — с точностью до 10^{-8} – 10^{-12} . Никакие другие явления и устройства не моделируются с такой точностью.

Человек своими органами чувств воспринимает лишь некоторые явления. Поэтому для восприятия обычно применяются измерительные средства, которые, реагируя на исследуемое явление, преобразуют измеряемую характеристику x в величину, доступную органам чувств человека. Таким образом, измеряемая величина x является входной величиной ИС, тогда как выходная величина y , будучи отображением измеряемой величины, воспринимается наблюдателем (человеком).

Поскольку ИС нужна для измерения величины x , а не выходной величины y , то приходится устанавливать отображение состояний y в значениях измеряемой величины x ; это отображение обозначено символом x^* .

В ИС происходят следующие преобразования, представленные на рис. 3.1 (для описания применена двойная символика, принятая в гл. 1 и использованная в последующих главах).

1. Состояния a_x измеряемой величины x в состояние a_y выходной величины y измерительной системы,

$$a_x \rightarrow a_y \quad \text{либо} \quad x \rightarrow y.$$

Здесь отображение осуществляется посредством физического преобразования, описываемого *уравнением преобразования*

$$a_y = F(a_x) \quad \text{либо} \quad y = F(x). \quad (3.1)$$

2. Состояния a_y выходной величины y в значение b_y^* этой величины,

$$a_y \rightarrow b_y^* \quad \text{либо} \quad y \rightarrow y^*.$$

Такое преобразование рассматривается в гл. 1, а функция отображения записывается в виде $b^* = f(a)$.

3. Значения b_y^* выходной величины y ИС в значение b^* измеряемой величины x ,

$$b_y^* \rightarrow b_x^* \quad \text{либо} \quad y^* \rightarrow x^*.$$

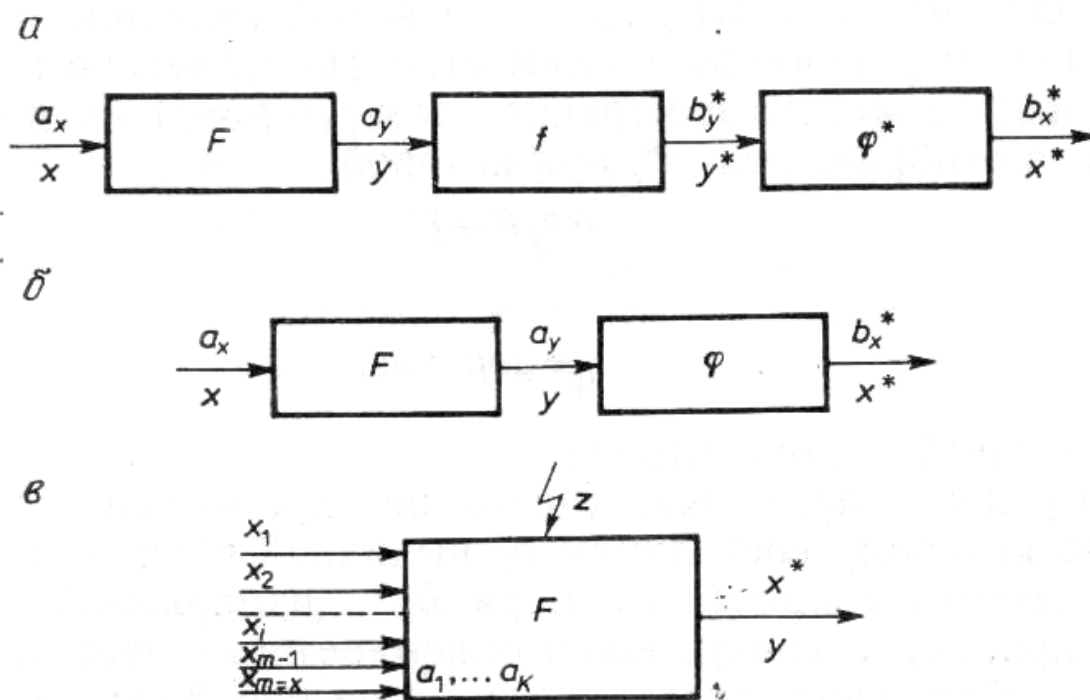


Рис. 3.1. Структура математической модели ИС:

a — формальные отображения; *б* — реализованные отображения; *в* — общая модель

Это отображение, реализованное в сфере абстракции, получается с помощью процедуры воспроизведения значения измеряемой величины на основе значения выходной величины,

$$b_x^* = f^{*-1}(b_y^*) \quad \text{либо} \quad x^* = f^{*-1}(y^*). \quad (3.2)$$

Приведенные выше преобразования можно записать совместно, а именно:

$$b_x^* = f^{*-1} \{f_y[F(a_x)]\} \quad (3.3a)$$

либо

$$x^* = f^{*-1} \{f_y[F(x)]\} \quad (3.3б)$$

Поскольку измерительная шкала измеряемой величины определяется функцией f_x , как в (1.29),

$$b_x = f_x(a_x) \text{ либо } x^* = f_x(x),$$

то должно выполняться равенство

$$f^{*-1} [f_y(F)] = f_x \quad (3.4a)$$

или

$$f^{*-1} f_y F = f_x, \quad (3.4б)$$

где f, f^{*-1}, F — функции или операторы.

Вышеприведенную взаимосвязь можно интерпретировать двояко:

1. Шкала f_x величины x , измеряемой данной ИС, зависит от шкалы f_y выходной величины y и от математической модели ИС. Путем подбора свойств элементов ИС, описываемых моделью F , а также процедуры воспроизведения измеряемой величины f^{l*} эту шкалу можно сформировать по-разному.

2. Поскольку шкалы f_x, f_y измеряемой величины x и выходной величины y приняты повсеместно (метрические шкалы), то условием правильного измерения (для $f_x = f_y = f$) является такая процедура отображения f^{l*} , при которой

$$f^{*-1} f F = f, \quad (3.4в)$$

$$f^{*-1} = F^{-1} \quad (3.4г)$$

в случае линейных операторов.

На практике применяется понятие *процедура градуировки*, согласно которому состояниям a_y выходной величины y измерительной системы придается мера b_x^* измеряемой величина x , т. е. процедура градуировки описывает (совместно) два последних отображения, представленных на рис. 3.1а:

$$a_y \rightarrow b_x^* \text{ либо } y \rightarrow x^*.$$

Это функция или оператор f^{l*} , значит (рис. 3.1. б)

$$b_x^* = f^{l*}(a_y) \text{ либо } x^* = f^{l*}(y). \quad (3.5)$$

С учетом того, что физическое преобразование $x \rightarrow y^*$ в ИС описывается оператором F (3.1), получаем

$$b_x^* = f^{l*} [F(a_x)] \quad (3.6a)$$

либо

$$x^* = f^{l*} [F(x)] . \quad (3.6б)$$

Область определения отображения (3.6) — действительность, в которой существуют состояния a_x измеряемой характеристики x , а область значений — числовая ось, на которой стрелка или другого типа индикатор отмечает значение b_x^* измеряемой величины x .

В целом отображения типа (3.3) и (3.6) называются *математической моделью ИС*. Эта модель складывается из трех или двух частей, представленных на рис. 3.1, а и б. Первая часть описывает действие технического устройства, в которое введена измеряемая величина x ; характерное состояние y этого устройства может быть непосредственно либо косвенно воспринято человеком.

Вторая часть модели ИС по рис. 3.1, б — *процедура градуировки*, после выполнения которой устройство становится измерительной системой.

Результат действия ИС искажен погрешностью

$$\Delta = x^* - x \neq 0. \quad (3.7)$$

Одна из причин появления погрешностей — влияние условий среды на свойства ИС, описываемые уравнением преобразования (3.1). Условия среды характеризуют *воздействующие величины*, такие как температура, напряжение питания, влажность, местоположение и т. п., обозначаемые в общем виде символами $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$. Обозначая, кроме того, измеряемую величину $x = x_m$, получаем в итоге *m* входных величин, как это показано на рис. 3.1, в. Выходной величиной является показание ИС, считываемое в значениях x^* измеряемой величины (это показание можно обозначить символом y).

Изменчивость воздействующих величин вызывает неоднозначность зависимости $y = F(x)$ и ввиду этого — возникновение погрешностей (3.7).

3.2. Моделирование характеристик ИС

Различают модели: а) линейные и нелинейные; б) статические и динамические; в) детерминированные и стохастические (вероятностные).

С точки зрения свойств области, в которой представлена модель, различаются модели: а) временные — непрерывные либо дискретные; б) аналоговые либо цифровые (т. е. область значений может создавать множество, непрерывное либо дискретное).

Кроме того, с точки зрения способа определения различаются: а) физические (физико-химические) модели; б) статистические модели.

Математическая модель ИС, как показано на рис. 3.1, в, имеет общий вид

$$y = F(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m, T, a_1, \dots, a_k, z). \quad (3.8)$$

Величины $x_1, \dots, x_m$ представляют собой случайные процессы с известными или неизвестными характеристиками; они могут быть измеримыми либо неизмеримыми, управляемыми либо неуправляемыми — в зависимости от цели и условий использования ИС. В уравнении (3.8) T обозначает время эксплуатации ИС. Если в этом нет необходимости, то

время T в модели игнорируется. Величины $a_1, \dots, a_k$ — конструктивные параметры ИС. Величина z характеризует неточность модели, а также неизвестное или неучтенное влияние окружения ИС.

По своей природе z — неизмеримая и неуправляемая величина, и часто принимается $E(z)=0$. Величина y — выходная величина ИС; обычно можно ограничить модель случаем одной выходной величины.

Математическую модель образуют оператор F , а также конструктивные параметры a , описывающие связь между входными и выходными величинами. Параметры a_j ($j=1, \dots, k$) характеризуют свойства элементов, из которых построена ИС.

3.2.1. Статическая модель

Модель называется *статической*, если входные величины реализованы в виде отдельных точек. Тогда оператором F служит функция f , а именно:

$$y=f(x_1, \dots, x_m). \quad (3.9)$$

Такие повсеместно применяемые статические модели являются детерминированными, т. е. предполагается, что конструктивные параметры $a_1, \dots, a_n$ стабильны, а величина $z = 0$. Каждому набору входных величин соответствует одна точка выходной величины.

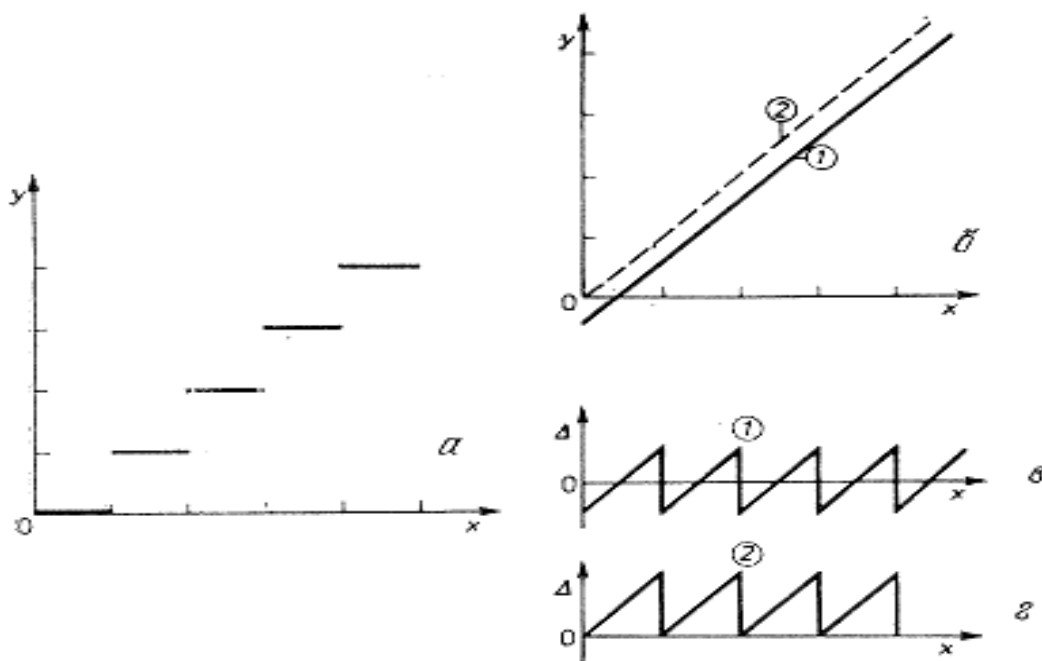


Рис. 3.2. Аппроксимация характеристики аналого-цифрового преобразователя линейной функцией: а — действительная характеристика; б — аппроксимация; в, г — погрешность аппроксимации

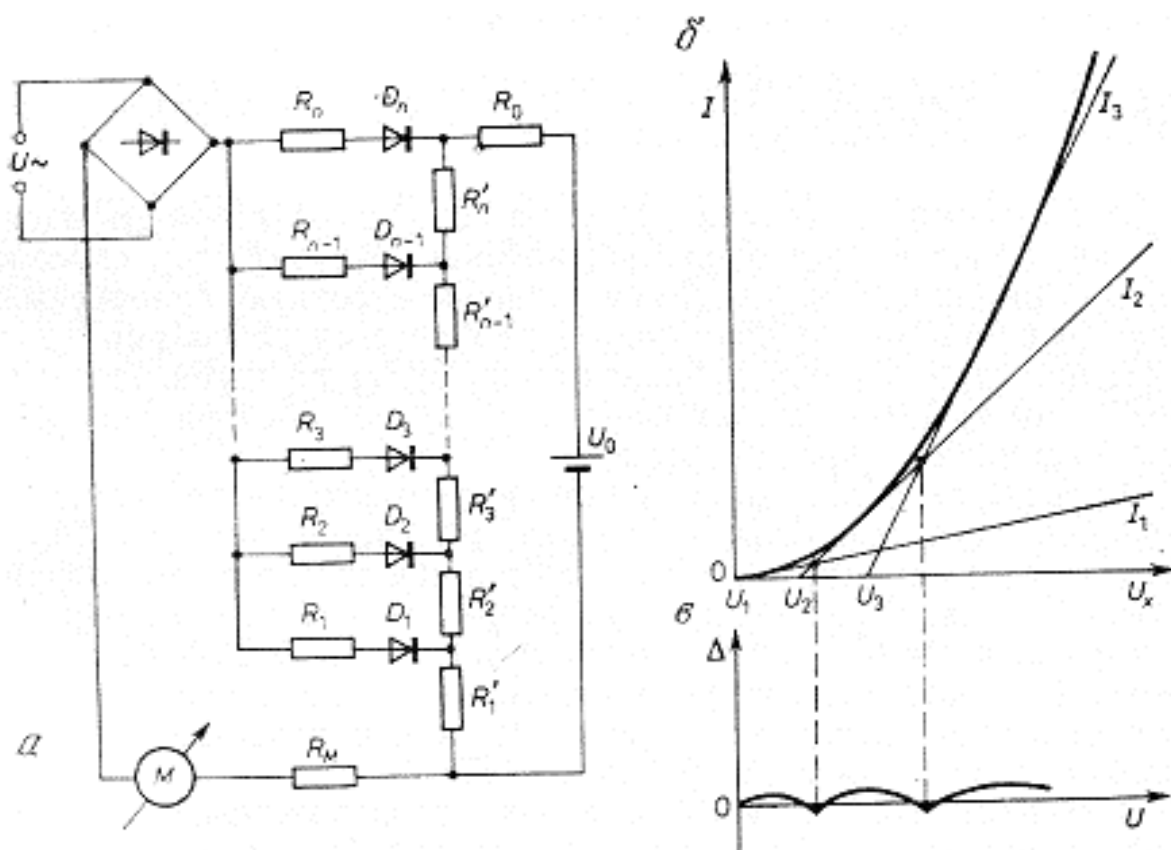


Рис. 3.3. Аппроксимация характеристики квадратичной функции линейными отрезками: а — схема диодного квадратора; б — действительная (кусочно-линейная) и идеальная (непрерывная) характеристики; в — погрешность аппроксимации

Важнейшая зависимость

$$y_0 = f_0(x) = f(x_{10}, \dots, x_{(m-1)0}, x), \quad (3.10)$$

установленная в условиях сравнения x_{i0} при $i=1, 2, \dots, m-1$, называется *характеристикой ИС*.

Функция f_0 может быть линейной или нелинейной. Для некоторых нелинейных характеристик используется функциональное преобразование переменных, затем, чтобы найти линейную характеристику, например: $u = +\sqrt{y}, \lg(y), \arcsin(y)$ и т. д.

Нелинейные модели довольно часто заменяют линейными моделями либо линейными отрезками, как показано на рис. 3.2. На рис. 3.3 показан обратный случай, когда действительная характеристика, представленная линейными отрезками, аппроксимируется квадратичной функцией, из-за чего погрешность аппроксимации имеет противоположный знак.

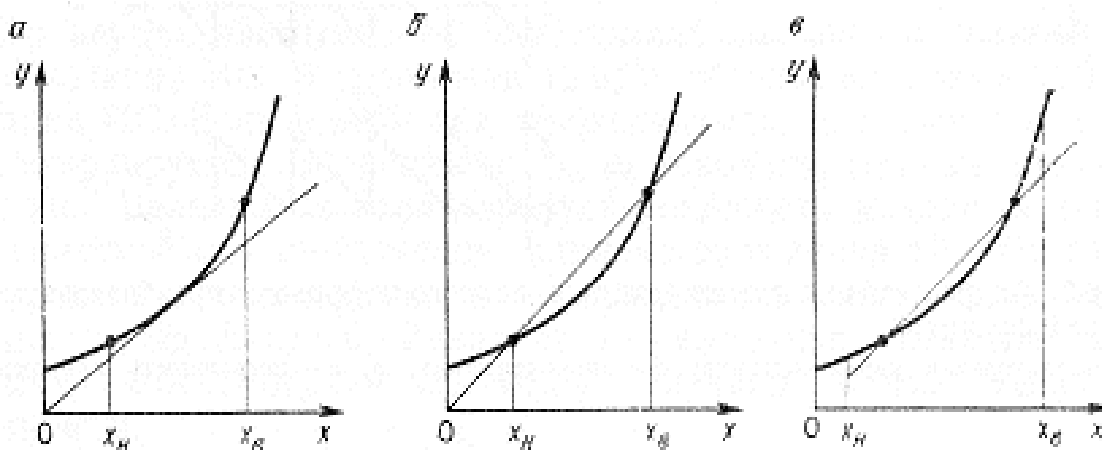


Рис. 3.4. Способы аппроксимации нелинейной непрерывной характеристики:
а — по касательной; б — по хорде; в — по секущей

Аппроксимация модели влечет за собой необходимость оценки погрешности этой операции, которая зависит от способа аппроксимации. Так, например, линейно-кусочную аппроксимацию функции можно производить различными способами (рис. 3.4); при этом ошибки аппроксимации будут разными. Погрешность может быть минимизирована путем выбора способа аппроксимации и числа отрезков.

Кусочно-линейная аппроксимация применяется все чаще по соображениям простоты численного моделирования на ЭВМ. Характеристики модели записываются при этом в виде координатных узлов. Детерминированные модели используются для описания идеальных свойств ИС или в качестве первого приближения в описании реальных ИС.

Тот факт, что ИС предназначена для нахождения измеряемой величины x , не всегда вызывает ослабление зависимости выходной величины y от воздействующих величин $x_1, \dots, x_{m-1}$.

Таким образом, модель ИС может быть функцией многих аргументов, т. е. обычно нелинейной функцией. Поэтому используются разные аппроксимации, например

$$f(x_1, \dots, x_m) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_m(x). \quad (3.11)$$

В вышеприведенных моделях нет ограничений свойств множества входных и выходных величин — в принципе это непрерывные (плотные) множества, т. е. аналоговые величины. Как показано на рис. 3.2, и входное, и выходное множества могут быть дискретными множествами. Появление дискретных множеств не затрудняет записи характеристик ИС; лишь в дальнейшем область этой функции (не убывающей либо не возрастающей относительно аргумента x) должна быть точно определена. Если выходная величина дискретна, то ИС и ее модель называются *цифровыми*. Выходным множеством тогда является множество целых чисел (либо его подмножество), умноженное на определенный квант q этой величины, а именно:

$$y = Nq, \quad (3.12)$$

$$N = 0, \pm 1, \pm 2 \dots q > 0.$$

Измеряемая величина x может быть дискретна, например, $x = Nq_x$, а $y = Nq_y$. При этом имеет место равенство

$$q_y = f'_0 q_x, \quad (3.13)$$

если в диапазоне кванта производная $f'_0 = dy/dx$ постоянна.

Кванты для величин x и y могут не быть постоянными. Величина y в цифровых ИС реализуется в натуральной форме либо в форме кода. Физическое состояние и запись зависят от типа кода. В общем виде

$$N = y^t w, \quad (3.14)$$

где для двоичного кода

$$y = [y_n y_{n-1} \dots y_1 y_0], \quad (3.15)$$

$$w = [2^n 2^{n-1} \dots 2^1 2^0], \quad (3.16)$$

причем компоненты вектора y приобретают значение 0 либо 1.

3.2.2. Динамические модели

Модель является динамической, если входные величины реализуются в форме множества, т. е. именно входные величины представляют собой непрерывные либо дискретные временные процессы. Выходная величина также является множеством. В любой данный момент времени реализуется один элемент этого множества.

Динамические модели в зависимости от способа их формулирования могут быть разнородными. Вывод модели из уравнений физики позволяет записать дифференциальные уравнения. Обычно используются уравнения Лагранжа, Максвелла, Кирхгофа, законы термодинамики, законы сохранения и т. д., либо частные уравнения физики. Если конструктивные параметры $a_1, \dots, a_k$ постоянны и $z \equiv 0$, то модель детерминирована.

Для данного конструктивного элемента ИС выходная величина y зависит от возмущения x , а также производных $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, а именно:

$$y = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}). \quad (3.17)$$

Взаимодействие многих элементов системы приводит к увеличению порядка дифференциального уравнения, а также к его усложнению. Получается одно либо несколько уравнений типа

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(p)}, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (3.18)$$

В общем виде это нелинейная модель. Особый класс составляют линейные модели, в которых дифференциальное уравнение является линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

Удобной формой представления динамической модели является уравнение состояния ИС:

$$dy/dt = f(y, x), \quad (3.19)$$

или, в матричной форме, непрерывное

$$\dot{y} = dy/dt = Ay + Bx \quad (3.20)$$

или дискретное

$$y(n+1) = Ay(n) + Bx(n) \quad (3.21)$$

во времени, где n обозначает очередные моменты времени (точная запись имеет вид: $y(n\Delta t)$; $n=0, 1, 2, \dots$). Достоинство уравнения состояния заключается в удобстве перехода к воспроизведению измеряемой величины x на основе y .

Другой способ формулирования модели вытекает из математического подхода. Отображение множества X в множество Y осуществляется с помощью оператора F . Для линейных систем часто используется линейный оператор Вольтерра:

$$y(t) = F_0[X(t)] = \int_0^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (3.22)$$

где $k(t, \tau)$ — ядро оператора, которое соответствует отклику системы на импульсное возбуждение.

Нелинейные системы описываются нелинейными операторами. Так, например, оператор Хаммерштейна

$$y(t) = F_H[x(t)] = \int_0^t k(t, \tau) f[x(\tau), \tau] d\tau, \quad (3.23)$$

позволяет описать системы, которые можно представить как последовательные соединения нелинейного статического и линейного динамического элементов с откликом на импульсное возмущение $k(t, \tau)$, как это показано на рис. 3.5.

Описание ИС с помощью операторов удобно для анализа и интерпретации результатов экспериментального определения системы. Поскольку отклик на импульсное возмущение прост для наблюдения и регистрации.

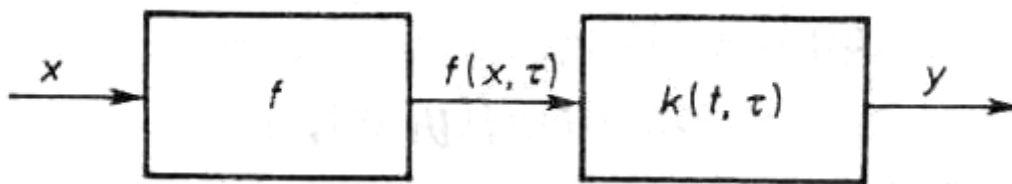


Рис. 3.5. Схема модели, описываемой оператором Хаммерштейна

Важную группу составляют нелинейные модели, в которых сигналы модулируются и кодируются. Модели таких элементов ИС можно разделить на две категории:

1) физическая модель, описываемая входными и выходными величинами с такой структурой и временным процессом, какие имеют место в действительности;

2) физическая модель отображения измеряемой величины во множестве входных и выходных величин данного элемента, т. е. представленная в области значений измеряемой величины¹.

Для оценки метрологических качеств наиболее важны модели второй категории, так как в области значений измеряемой величины выражаются и погрешности. Происходящие же в каком-либо элементе ИС физические явления можно описать только моделью первой категории, поэтому оба типа моделей рассматриваются совместно, как это представлено на рис. 3.6.

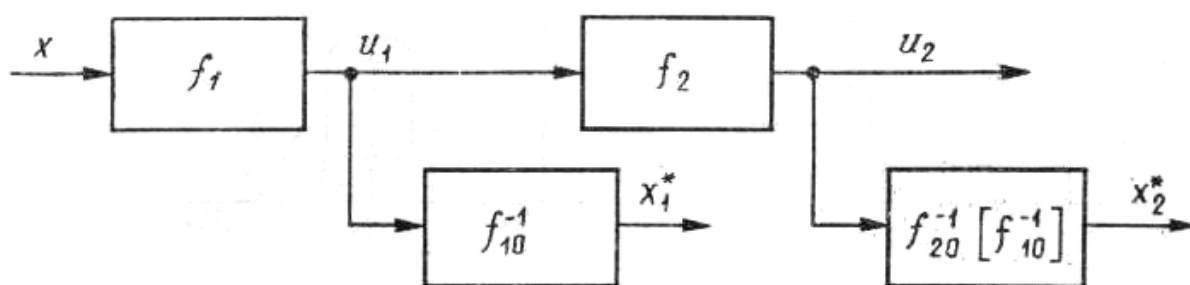


Рис. 3.6. Отображение измеряемой величины с помощью сигналов

Символом u обозначен натуральный входной либо выходной сигнал элемента $y=x^*$ — отображение x в области измеряемой величины. Физическое преобразование описывается уравнением преобразования $y=F(x)$, отображение в области измеряемой величины дает процедура $x^*=f^{-1}(y)$. При определенном навыке в записи этих моделей применяют упрощения, основанные на выражении физических сигналов в области измеряемой величины. Такой способ моделирования относится к аналоговым нелинейным системам с модуляцией сигналов, а также к цифровым системам, действующим непрерывно и циклично. Способ моделирования иллюстрируют приведенные ниже примеры.

Модулятор амплитуды. Блок-схема и структурная схема модулятора представлены на рис. 3.7. На рис. 3.7, а символ f означает преобразование величины x в величину y по уравнению

$$y = xu, \quad (3.24)$$

где

$$u = A \sin \omega_0 t, \quad (3.25)$$

так что уравнение

¹ Модели первой категории называются сигнальными моделями, а второй — моделями значений (величин).

² В случае модуляции амплитуды импульсов модулированный описывается уравнением $u = A \delta(t - i\Delta t)$.

$$y(t) = x(t) A \sin \omega_0 t = f_0(x) \quad (3.26)$$

является идеальной моделью модуляции.

Реальная модель будет несколько иной, а именно $f(x)$. Отображение состояния входа дает следующий результат:

$$x^* = \varphi(y) = f_0^{-1}(y) = f_0^{-1}[f(x)]. \quad (3.27)$$

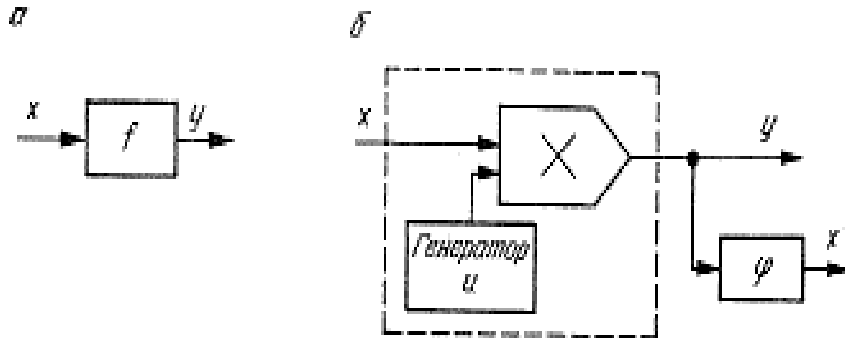


Рис. 3.7. Схема модулятора амплитуды:

a – блок-схема; *б* – структурная схема

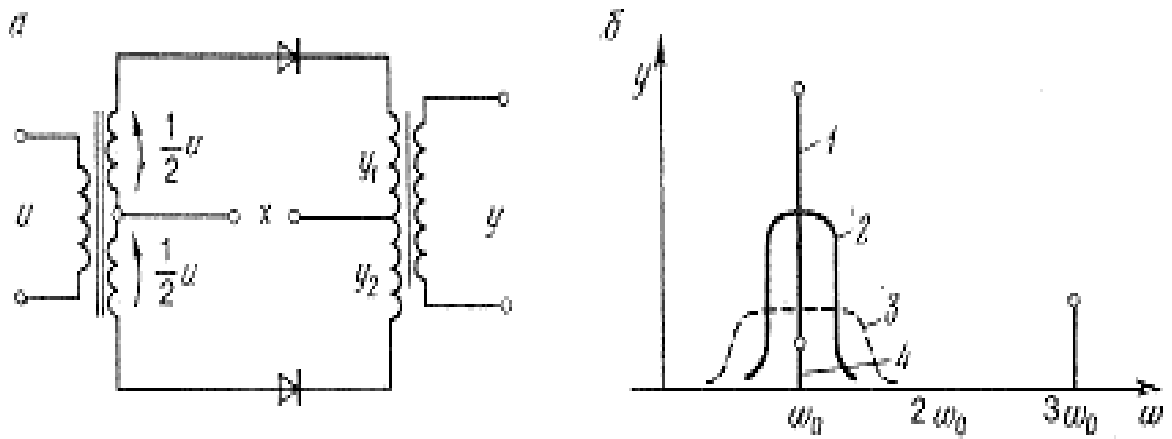


Рис. 3.8. Кольцевой модулятор:

a — принципиальная схема; *б* — гармоническое распределение выходной величины. Номерами обозначены спектры, соответствующие членам формулы (3.35г)

Применение кольцевого модулятора по схеме, показанной на рис. 3.8,а, базируется на модели

$$y_1 = \left(x - \frac{1}{2}u\right)^2 = x^2 - xu + \frac{1}{4}u^2, \quad (3.28a)$$

$$y_2 = \left(x + \frac{1}{2}u\right)^2 = x^2 + xu + \frac{1}{4}u^2, \quad (3.28б)$$

$$y_0 = y_2 - y_1 = 2xu. \quad (3.28в)$$

Фактическая характеристика выпрямителей отличается от квадратичной, ввиду чего вместо $m = 2$ характеристика имеет «форму

$$y_I = v^m = b_1 v + b_2 v^2 + b_3 v^3, \quad (3.29)$$

Модулятор частоты. Блок-схема модулятора представлена на рис. 3.9. Уравнение идеального преобразования имеет вид

$$y_0 = A \sin[(w_0 + x)t], \quad |x| \ll w_0, \quad (3.30)$$

где $y = A \sin wt$.



Рис. 3.9. Блок-схема модулятора частоты

Процедура воспроизведения x на основе действительного выходного сигнала y следует из (3.30), а именно:

$$x^* = a[(1/t) \arcsin(y/A) - w_0], \quad (3.31)$$

где a — степень свободы процедуры градуировки.

3.2.3. Модели ИС с дискретным временем

Многие ИС действуют циклически, ввиду чего результат измерения имеет вид:

$$y(t) = y(t_i)[1(t-jT) - 1(t-(j+1)T)] = y(t_i)H_j, \quad (3.32)$$

где $j = 0, 1, 2, \dots$; $t_j = jT$.

Символом H_j обозначена функция

$$H_j = 1(t-jT) - 1[t-(j+1)T], \quad (3.33)$$

которая описывает действие выходной ступени преобразования цифровых ИС, называемой регистром. Регистр — это устройство памяти, в котором фиксируются результаты измерения за время одного цикла измерения. Регистр управляется блоком управления ИС.

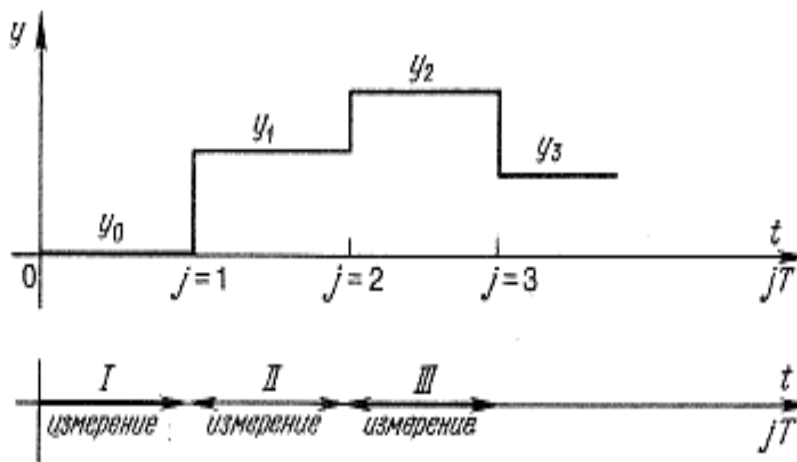


Рис. 3.10. Выдача результата измерения цифровой ИС

Во время первого измерения ИС показывает результат y_0 , т. е. состояние перед измерением, во время второго измерения — результат первого измерения y_1 , и т. д. Это иллюстрирует рис. 3.10. Индекс j обозначает номер измерения, а T — период (время) измерения. Время измерения поделено на элементарные временные шаги $i\Delta t$, идентифицированные порядковым номером i . Измерения начинаются с момента $i = 0$. В моменты времени $i\Delta t$ может произойти: а) изменение состояния элементов ИС либо величин, описывающих это состояние; б) изменение структуры ИС.

Состояние элемента описывается величиной u_i или величинами u_{ki} ($k = 1, 2, 3, \dots$) в моменты u ($i\Delta t$), а поддержание этого состояния в течение временного шага — функцией H_i (3.44), как это представлено в формуле (3.43). Примеры моделирования ИС с дискретным временем показаны ниже.

Цифровой вольтметр с двойным интегрированием. Структурная схема цифрового вольтметра представлена на рис. 3.11. Картину прохождения сигналов по отдельным ступеням преобразования дает рис. 3.12. В первом периоде работы устройства осуществляется интегрирование напряжения U_x , и выходное напряжение интегратора имеет вид

$$U_{y1} = k_1 \int_0^t U_x dt. \quad (3.34)$$

С момента $i = 0$ счетчик L отсчитывает импульсы, вырабатываемые генератором импульсов:

$$U_{Г,М} = \delta(t - i\Delta t), \quad i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.35)$$

а состояние счетчика в текущий момент описывается уравнением

$$L = \int_0^t U_{Г,М} dt = U_{Г,Н} t < N_0, \quad (3.36)$$

где

$$N\Delta t < t < (N+1)\Delta t. \quad (3.37)$$

Если к моменту времени t_1 счетчик достигнет состояния переполнения N_0 , то интегрирование напряжения U_x прекращается и происходит переключение на входе интегратора напряжения U_0 . Первый период измерения заканчивается, когда

$$t_1 = \sum_{i=1}^{N_0} \Delta t_i = N_0 \Delta t_{cp.} = N_0 / f_{1cp.}, \quad (3.38)$$

$$U_1 = U_{y1} = k_1 \int_0^{t_1} U_x dt = t_1 k_1 \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} U_x dt = k_1 t_1 U_{xcp.} = \frac{k_1 N_0}{f_{1cp.}} U_{xcp.}. \quad (3.39)$$

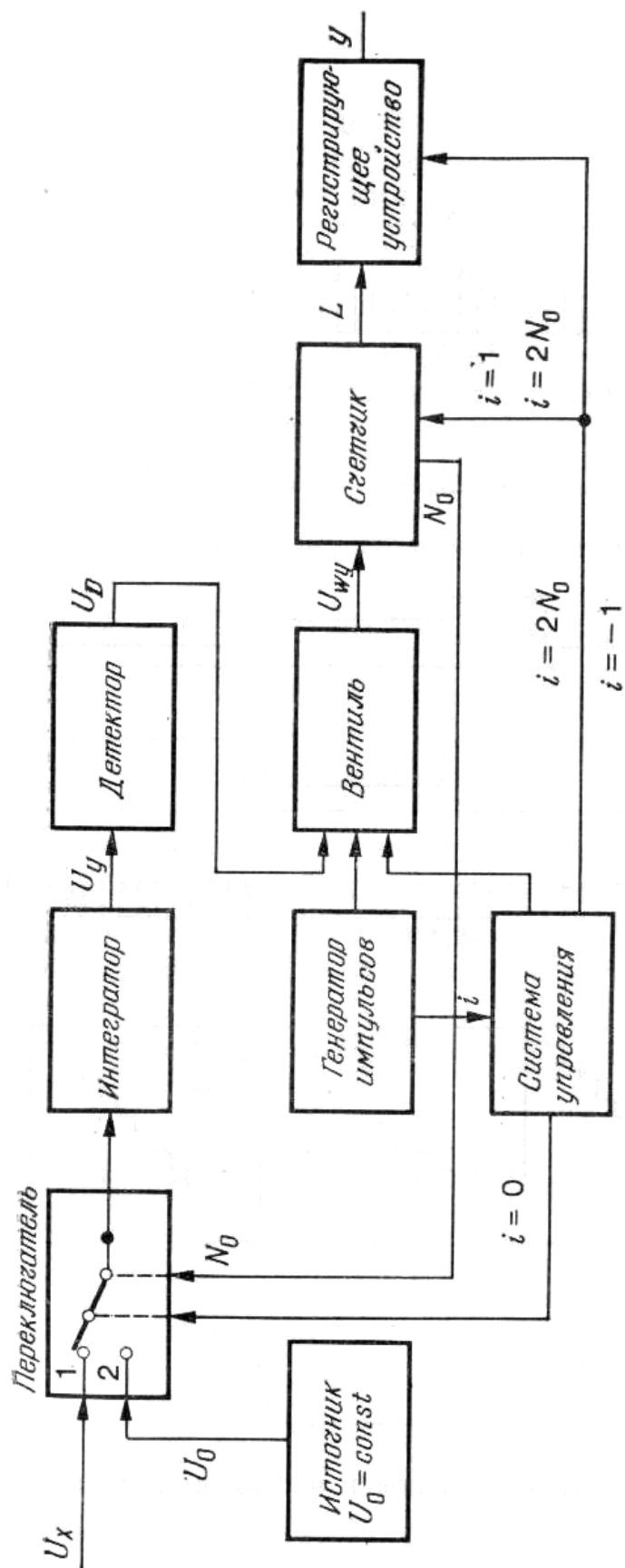


Рис. 3.11. Структурная схема цифрового вольтметра с двойным интегрированием

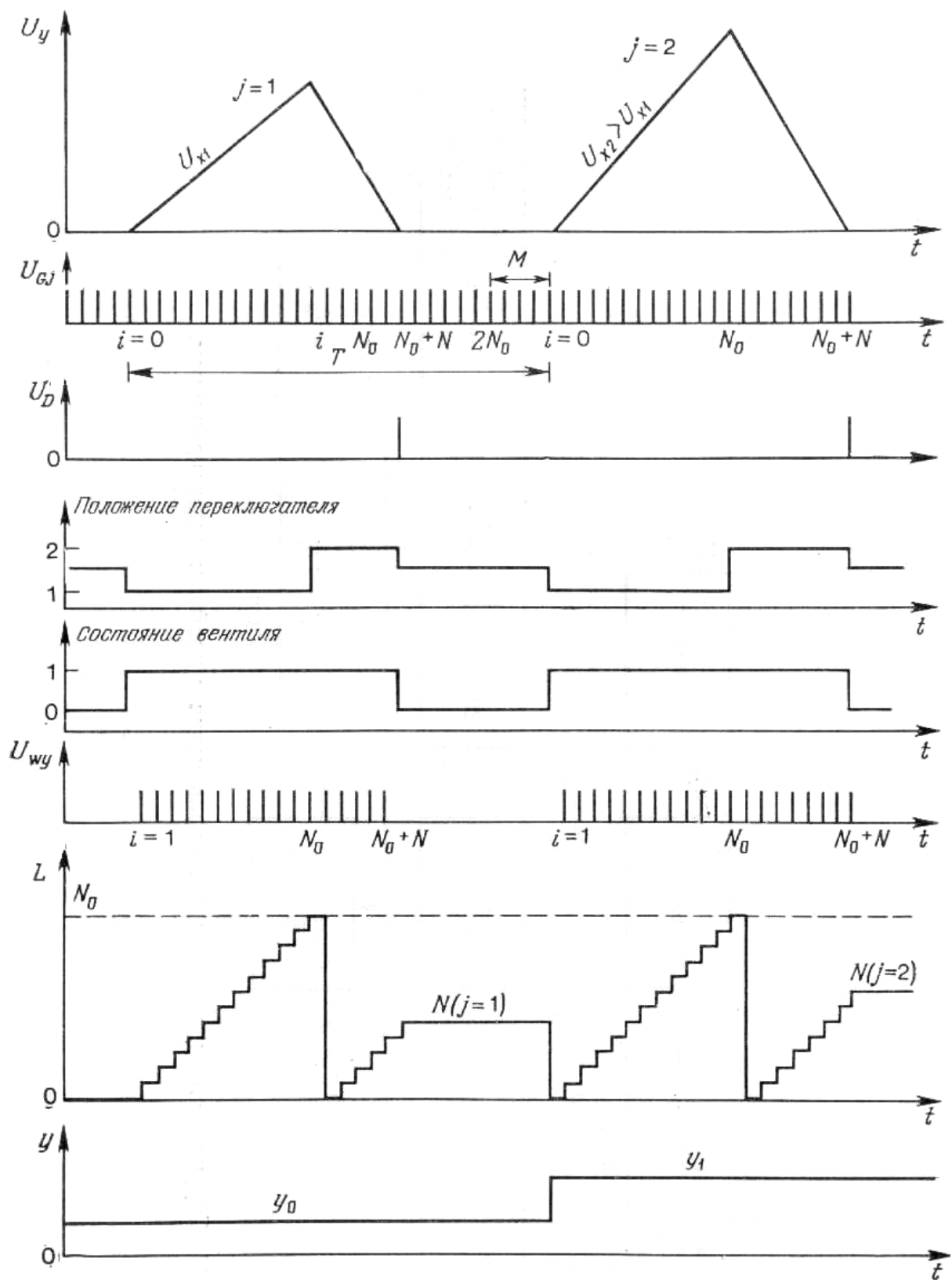


Рис. 3.12. Характеристики сигналов в цифровом вольтметре с двойным интегрированием

Во втором периоде измерения $j=l$ выходное напряжение интегратора уменьшается в соответствии с уравнением

$$U_2 = U_1 - k_2 \int_{t_1}^t U_0 dt \quad (3.40)$$

и в момент t_2 достигает нуля. Тогда детектор генерирует импульс

$$U_D = \delta(U_y) = \delta(t - t_2) \quad (3.41)$$

на закрытие вентиля (ключа), и последующие импульсы от генератора до счетчика не доходят.

Найдем t_2 . В момент, когда интегрирование заканчивается, выходное напряжение генератора достигает порога срабатывания детектора U_D :

$$U_1 - k_2 \int_{t_1}^{t_2} U_0 dt + U_D = U_1 - k_2 U_0 (t_2 - t_1) + U_D = 0, \quad (3.42)$$

откуда с учетом (3.39) получается:

$$t_2 - t_1 = \frac{U_1 + U_D}{k_2 U_0} = \frac{k_1}{k_2} \frac{N_0}{f_{1CP.}} \frac{U_{XCP.}}{U_0} + \frac{U_D}{k_2 U_0} = \frac{k_1}{k_2} \frac{N_0}{f_{1CP.}} \frac{U_{XCP.} + U_D}{U_D}. \quad (3.43)$$

Здесь U_{Dx} — величина нечувствительности детектора в состоянии равновесия.

В момент t_2 состояние счетчика достигает

$$L = \sum_{i=1}^{N_0+N} 1(t - i\Delta t) = N_0 + N, \quad (3.44)$$

при этом N соответствует условию (3.37) для момента закрытия ключа,

$$(N_0 + N)\Delta t < t_2 < (N_0 + N + 1)\Delta t. \quad (3.45)$$

Измерение времени t_2 выполняется путем считывания временных шагов Δt_i , так что

$$t_2 = \sum_{i=0}^{N_0} \Delta t_i + \sum_{i=N_0}^{N_0+N} \Delta t_i + \Delta_2 = t_1 + N / f_{2CP.} + \Delta_2, \quad (3.46)$$

где

$$0 < \Delta_2 \leq \Delta t_{N+1}, \quad (3.47a)$$

или

$$0 < \Delta_2 f_{2N} \leq 1. \quad (3.47b)$$

Отсюда после подстановки (3.43) в выражение (3.46) получаем

$$N = (t_2 - t_1 + \Delta_2) f_{2CP.} = \frac{k_1}{k_2} \frac{f_{2CP.}}{f_{1CP.}} N_0 \frac{U_{XCP.} + U_D}{U_0} + \Delta_z. \quad (3.48)$$

Это — уравнение преобразования интегрирующего вольтметра, где измеряемой величиной является среднее значение напряжения $x = U_{xcp.}$, а

выходной величиной – $y=N$. Величина $\Delta_z = \Delta_2 f_{2CP}$ – погрешность считывания, значение которой случайно на временном интервале.

Представленная модель учитывает некоторые реальные свойства цифрового вольтметра – неодинаковые постоянные интегрирования и частоту генератора импульсов в первом и втором циклах измерения, а также нечувствительность детектора U_d . Процедура калибровки определяется идеальной моделью, т. е. равенством (3.48) при $k_1=k_2$, $f_{1CP}=f_{2CP}$, $U_d=0$, т. е. в идеальном случае:

$$(N/N_0)U_0 < U_{xcp}^* < [(N+1)/N_0]U_0. \quad (3.49)$$

После подстановки в эту процедуру действительной модели (3.48) получаем

$$\frac{k_1}{k_2} \frac{f_{2CP}}{f_{1CP}} (U_{xcp} + U_L) < U_{xcp}^* < \frac{k_1}{k_2} \frac{f_{2CP}}{f_{3CP}} (U_{xcp} + U_d) + (U_0 / N_0). \quad (3.50)$$

Время измерения составляет $T=2N_0Dt+MDt$, причем за M временных шагов осуществляются перенос состояния счетчика в регистр, обнуление счетчика и интегратора.

Уравнения преобразования (3.34), (3.36), (3.37), (3.39) позволяют определить состояние цифрового вольтметра в каждый момент времени t , так что представленная модель является динамической.

3.3. Моделирование источников погрешностей. Вероятностные модели

При моделировании погрешностей стараются учитывать реальные свойства конструктивных элементов ИС. Источниками погрешности могут быть:

- 1) явления, имеющие молекулярный характер,
- 2) влияние некоторых факторов окружающей среды на явления внутри ИС,
- 3) процессы старения и износа (изменения свойств элементов, из которых построена ИС, носят случайный характер).

В моделировании характеристик явлений такого рода принимаются постоянными значения коэффициентов уравнения преобразования. Вот ряд примеров таких моделей.

Явления молекулярного характера

1. Количество частиц, излучаемых источником изотопов, на интервалах времени подчиняется распределению Пуассона. Скорость частиц неодинакова и приблизительно описывается распределением Максвелла. В детерминированных моделях оперируют средним потоком частиц $\bar{N}$. На рис. 3.13 показано, как с увеличением времени усреднения (либо с по-

вышением активности источников) ослабевает случайный характер явления.

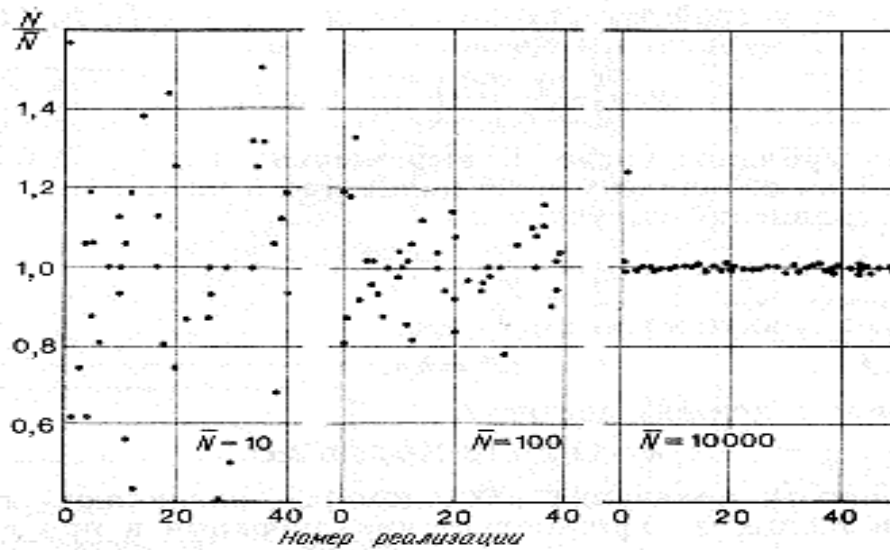


Рис. 3.13. Распределение значений числа N частиц для различных средних значений потока частиц $\bar{N}$

2. Удары частиц газа в нить торсионных весов либо гальванометра вызывают флуктуации подвижного органа с отклонением $\Delta\phi$, причем среднеквадратическое отклонение составляет

$$\Delta\phi_{\text{СК}} = \sqrt{kT/a}, \quad (3.51)$$

где

$$a = \pi^2 r^4 G / 2l.$$

Здесь G — модуль поперечной упругости материала нити, r , l — размеры нити (радиус сечения и длина), k — постоянная Больцмана (универсальная газовая постоянная), T — абсолютная температура.

3. Тепловые шумы в сопротивлениях описывает формула Найквиста:

$$E_{\text{СК}} = \sqrt{4kTR\Delta f}, \quad (3.52)$$

где $E_{\text{СК}}$ — среднеквадратическое значение электродвижущей силы для полосы частоты Δf ; R — величина сопротивления.

4. Флуктуационный (дробовой) шум, возникающий в фотоэлектронных умножителях (и в электронных лампах), будучи эффектом катодной эмиссии электронов, характеризуется током эмиссии

$$i_{\text{СК}} = \sqrt{2ei_0\Delta f} \quad \text{либо} \quad \Delta i = \sqrt{ei_0/t}, \quad (3.53)$$

где i_0 — среднее значение тока за период t ; e — заряд электрона.

5. Токовый шум, обусловленный молекулярной природой электричества, проявляется в измерительных датчиках (контурах) с малой силой тока, таких как детекторы излучения, тонкопленочные резисторы, полу-

проводники и т. д. Среднеквадратическое значение этого шума определяется по эмпирической формуле

$$\Delta V_{\text{СК}} = cRi\sqrt{\Delta f / f}, \quad (3.54)$$

где c — постоянная, R — сопротивление, i — сила тока, f — частота.

В электронных системах проявляются:

- 1) токовые шумы с интенсивностью, обратно пропорциональной частоте,
- 2) тепловые и дробовые шумы, не зависящие от частоты,
- 3) паразитные шумы для очень высоких частот.

Молекулярный характер имеют явления теплообмена путем теплопроводности, излучения и конвекции, давления жидкости или газа и много других явлений.

Влияние окружающей среды

Влияние среды на ИС обусловлено зависимостью свойств конструктивных элементов от окружающих условий. Почти все свойства материалов зависят от температуры, ИС питается от энергетической сети и т. д. Выявленные и исследованные зависимости учитываются в математической модели путем формулирования зависимости выходных величин от воздействующих величин $x_1, \dots, x_{m-1}$ для различных значений x . Можно также учесть динамические состояния. Но все явления охватить моделью не удастся.

Сохраняется:

- 1) остаточное влияние колебаний напряжения в сети,
- 2) влияние солнечной радиации (его можно уменьшить, но трудно полностью исключить),
- 3) изменения давления в помещении вследствие напора ветра, а также другие явления подобного характера.

Остаточное (неучтенное) влияние среды учитывается в моделях путем введения переменной z .

Старение и износ

Можно рассмотреть также вопросы старения и износа материала. Это явления, продолжительные по времени, протекающие обычно монотонно.

1. Так, например, старение изоляции подчиняется закону Аррениуса

$$v = v_{\infty} e^{-\Delta V / RT} = v_{\infty} e^{-B/T}, \quad (3.55)$$

где v — скорость химических реакций, R — газовая постоянная, T — температура, ΔV — энергия активации, v_{∞} — постоянная реакции, $B = \text{const}$.

2. Скорость испарения материала из горячего волокна описывается выражением

$$G = (1/\sqrt{2\pi R}) p \sqrt{M/T}, \quad (3.56)$$

где p — давление, M — молекулярная масса материала, R — газовая постоянная, T — температура.

К эффектам старения также относятся:

3. Истирание и износ подвижных частей, ход и продолжительность которых можно оценить подобным же образом.

4. Загрязнения поверхности оптических элементов, токопроводящие, химически и физически активные, всегда являются помехами, хотя они и трудны для аналитического описания.

В ИС множество элементов различным образом подвержены старению и износу, и наблюдается итоговый эффект, который не всегда монотонен.

В моделировании источников погрешностей целью является детерминированная модель ИС. Входящие в модель коэффициенты $b_1, \dots, b_i$ однозначно зависят от *конструктивных параметров* $a_1, \dots, a_k^1$:

$$b_i = \psi_i(a_1, \dots, a_k). \quad (3.57)$$

На каждый из конструктивных параметров могут влиять молекулярные явления либо старение материалов, ввиду чего данный параметр a_j содержит постоянную a_{j0} и случайную Δa_j составляющие, а именно:

$$a_j = a_{j0} + \Delta a_j. \quad (3.58)$$

Для учета этих явлений приходится вводить специальные источники погрешностей, описывающие, например:

- 1) интенсивность тепловых шумов в резисторе,
- 2) сопротивление стыков в контуре, так как они не следуют непосредственно из детерминированной модели.

Каждый источник как случайная переменная характеризуется распределением вероятностей и спектральной плотностью. Если источник погрешности локализован в структурной схеме, а его характеристики и модель известны, то степень влияния этого источника на выходную величину можно рассчитать.

Сложность этой задачи обусловлена следующими причинами:

1. Кроме постоянных значений величин $x_1, \dots, x_m$, что позволяет принять статическую модель, внутри ИС существуют источники случайных величин, для синтеза которых следует использовать динамическую модель.

2. Внутренние источники погрешностей характеризуются весьма широким спектром частот; высокие частоты возникают в результате молекулярных явлений, очень низкие — в процессах старения. Распределения вероятностей внутренних источников погрешностей могут быть разнород-

¹ Здесь использованы следующие обозначения в модели и в условиях сравнения: $y = F_0(x) = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_i f_i(x)$, что согласуется с моделью (3.13).

ными. Процессы старения ведут к тому, что общий эффект погрешностей может представлять собой нестационарный процесс.

3. Нелинейные элементы могут значительно расширять спектры шумов, а усредняющие элементы — зауживать их. Поэтому приблизительные оценки могут быть ошибочны.

Ниже мы рассмотрим способ моделирования источников погрешностей и некоторые свойства преобразования их.

3.3.1. Нелинейные элементы

Свойства модели. Рассматриваются безынерционные нелинейные элементы (без динамики). Источник погрешностей на входе элемента описывается распределением вероятностей $p(x)$ и спектральной плотностью $S_x(\omega)$. Это означает, что случайная величина X стационарна. На выходе элемента с характеристикой $y=f(x)$ получается стационарная случайная переменная Y .

1-й этап. Определение вероятностного распределения. Исходными данными для расчета являются конструктивные параметры $a_1, \dots, a_k$, а также многомерное распределение вероятностей $p(a_1, \dots, a_k)$ и граничные распределения $p_l(a_1, \dots, a_k)$. Коэффициентами модели служат величины $b_1, \dots, b_l$, определяемые выражением (3.57) при $i=1, 2, \dots, l$, а именно:

$$b_i = \psi_i(a_1, \dots, a_k).$$

Функцию ψ_i можно посредством последовательных подстановок представить в виде элементарных функций: суммы, разности частного и произведения двух первичных переменных a_j или функции одной переменной. Расчетные формулы для элементарных функций приведены в табл. 3.1.

2-й этап. Определение спектральной плотности. Исходные данные: спектральная плотность $S_x(\omega)$ либо функция корреляции $K_x(\tau)$ стационарного источника погрешностей, а также характеристика элемента¹. Для линейного элемента существует связь

$$S_y(\omega) = k^2 S_x(\omega), \quad (3.59)$$

$$K_y(\tau) = k^2 K_x(\tau). \quad (3.60)$$

Относительно просто можно рассчитать (по определению) функцию корреляции на выходе элементов с квадратичной или многомерной характеристикой. Поэтому прочие характеристики следует аппроксимировать многомерной характеристикой.

¹ Как показано выше, определяющими их входными величинами являются конструктивные параметры, обозначенные здесь символом x .

Таблица 3.1.

Формулы для расчета распределения вероятности функции непрерывных случайных переменных

Функции	Зависимые переменные	Независимые переменные
Одномерная $Z=f(X)$, если существуют $X=\omega(X)$ и φ'	$p_z(z) = p_x[\varphi(z)] \varphi'(z) $	
$Z=X+Y$	$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x)dx$	$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_2(z-x)dx$
$Z=X-Y$	$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z+y, y)dy$	$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(z+y)p_2(y)dy$
$Z=XY$	$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \frac{z}{x})\frac{1}{ x }dx$	$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ x } p_1(x)p_2(\frac{z}{x})dx$
$Z=X/Y$	$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(yz, y) y dy$	$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(yz)p_2(y) y dy$

Нижеприведенные формулы относятся к случайной переменной X со средним значением, равным нулю ($E[X] = 0$), а также с нормальным распределением вероятностей. Если

$$Y=X^2, \quad (3.61)$$

то, обозначив

$$X_1=X(t), X_2=X(t+\tau), \quad (3.62)$$

можно рассчитать функцию корреляции по определению

$$K_y(\tau)=E\{[X_1^2-E(X_1^2)][X_2^2-E(X_2^2)]\}. \quad (3.63)$$

После выполнения преобразований и расчетов получаем

$$K_y(\tau)=2[K_x(\tau)]^2. \quad (3.64)$$

Спектральная плотность вычисляется по формуле Винера — Хинчина

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2[K_x(\tau)]^2 e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.65)$$

Свешников предлагает рассчитывать интеграл (3.65) по формуле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [K_x(\tau)]^2 e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1)S_x(\omega - \omega_1)d\omega_1, \quad (3.66)$$

что значительно упрощает расчеты.

Если характеристика элемента имеет вид:

$$Y=b_0+b_1X+b_2X^2, \quad (3.67)$$

где X – случайная переменная с нормальным распределением и средним значением, равным нулю, то

$$K_y(\tau) = 2b_2^2[K_x(\tau)]^2 + b_1^2K_x(\tau), \quad (3.68)$$

$$S_y(\omega) = (24b_1b_2K_x(0) + 2b_2^2) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1)S_x(\omega - \omega_1)d\omega_1 + b_1^2S_x(\omega). \quad (3.69)$$

Для нелинейного элемента с характеристикой

$$Y=XU, \quad (3.70)$$

если $E(X)=E(U)=0$, обе переменные X, U имеют нормальные распределения, а характеристики их известны, то

$$K_y(\tau) = K_x(\tau)K_u(\tau) + [K_{xu}(\tau)]^2, \quad (3.71)$$

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [S_x(\omega_1)S_u(\omega - \omega_1) + S_{xu}(\omega_1)S_{xu}(\omega_1 - \omega)]d\omega_1. \quad (3.72)$$

Примеры (3.67), (3.70) позволяют шаг за шагом рассчитать очень сложные характеристики элементов. Однако расчеты усложняются, так как по достижении нелинейности распределение выходной величины перестает быть нормальным.

3.3.2. Нестационарные источники погрешностей

Источниками нестационарности являются процессы старения и износа. Эти источники проявляют себя изменчивостью и зависимостью конструктивных параметров ИС от времени и тем самым изменчивостью коэффициентов статической (либо динамической) математической модели.

Нестационарный элемент. *Нестационарным* будем называть элемент, параметры которого являются нестационарными величинами и изменяются случайным образом. Как показано выше, такой параметр можно рассматривать как независимый источник нестационарности на входе определенной ступени преобразования. Поскольку потенциально каждый конструктивный параметр является источником нестационарности, число независимых случайных входных переменных составляет $m+k-1$ (в том числе $m-1$ воздействующих величин и k конструктивных параметров).

Анализируя физические причины нестационарности конструктивных параметров, необходимо различать такие составляющие:

1. $\Delta \tilde{a}_{j_0}$ - неопределенность номинальных значений конструктивных параметров. Вводя в математическую модель номинальное значение a_{j_0} данного параметра, мы основываемся на результатах измерения этого па-

раметра, содержащих погрешность Δa_{j0} . В анализируемой ИС присутствует одно постоянное значение этой погрешности (один элемент множества), в результате чего указанная погрешность имеет постоянную величину. Тем не менее эта погрешность должна быть учтена в модели.

2. Δa_{jd} — зависимость данного параметра от измеримых условий среды, например от температуры. Причина эта учтена в детерминированной модели путем принятия i -й величины в качестве воздействующей (влияющей). Зависимость выходной величины от воздействующей x_i , принятая в модели (3.8), характеризует суммарный эффект всех конструктивных параметров, т. е.

$$dy_i = \left[\frac{\partial F(x_1, \dots, x_{m-1}, x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right] dx_i, \quad (3.73)$$

либо

$$\Delta y_i = \int_{x_{i0}}^{x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \int_{x_{i0}}^{x_i} \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i. \quad (3.74)$$

Фактор da_j/dx_i известен из свойств материала, а производная $\partial F/\partial a_j$ определяется по модели (3.8) ИС.

3. $\Delta \tilde{a}_{in}$ — нестационарность параметра a_j во времени. Эту нестационарность могут вызвать:

а) молекулярные явления, называемые в дальнейшем *осцилляциями*. Условно в качестве характерного диапазона частот принимается диапазон $f > 1$ Гц, т. е. те осцилляции, которые не воспринимаются наблюдателем и эффективно отфильтровываются электромеханическими измерительными приборами;

б) неучитываемые изменения воздействующих величин (например, изменение атмосферного давления под влиянием напора ветра) вследствие не включения их в детерминированную модель либо вследствие изменений влияющих величин ниже их порогов измеримости (например, изменение температуры в термостате). В качестве характерного диапазона частот принимается интервал $f = (10^{-5} \dots 41)$ Гц. Такой порог для многих явлений определяется суточным циклом. Эти изменения называются *флуктуациями*;

в) старение и износ материалов. Это дрейф, являющийся главной причиной нестационарности. Частота соответствующих изменений мала ($f < 10^{-5}$ Гц).

Характеристику шумов в диапазоне $10^{-8} \dots 10^8$ Гц приводит Манро. Распределение шумов подтверждает принципиальность деления их на осцилляции, флуктуации и дрейф. В диапазоне осцилляции, например химического производства, шумы частотой до 700 Гц имеют различное распределение вероятности — нормальное, равномерное и синусоидальное.

Согласно (3.58), j -й конструктивный параметр описывается переменной

$$a = a_0 + \Delta \tilde{a} = a_0 + \Delta \tilde{a}_0 + \Delta \tilde{a}_d + \Delta \tilde{a}_n. \quad (3.75)$$

На рис. 3.14 показаны источники погрешностей, причем символом a_p обозначено истинное значение параметра. Индекс 0 соответствует эталонным условиям, T – время эксплуатации. Величин, воздействующих на j -й параметр, может быть и больше.

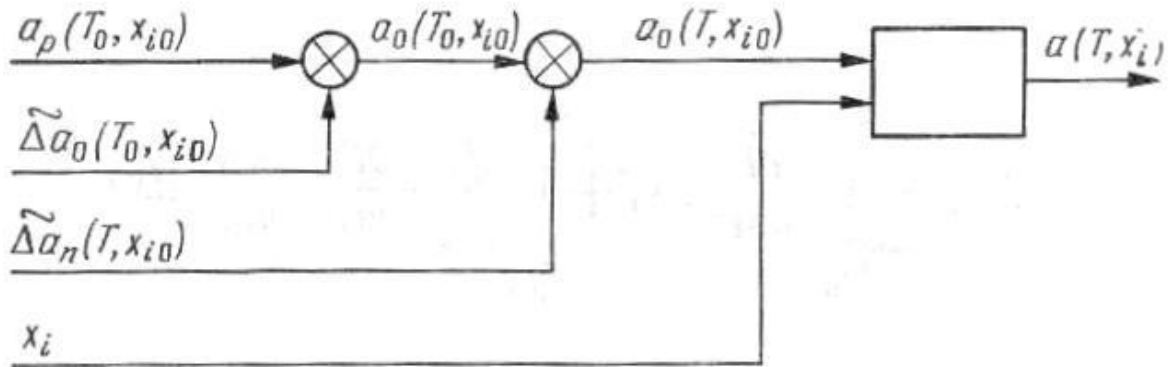


Рис. 3.14. Составляющие погрешности конструктивного параметра

Нестационарный источник. Член $\Delta \tilde{a}_n$ выражения (3.75) отвечает внутреннему, нестационарному источнику погрешности ИС.

Обозначим его символом $u(t)$; характеристика этого источника известна, например:

$$u(t) = g(t)e(t). \quad (3.76)$$

Здесь $g(t)$ либо $g(T)$ — известная функция времени, $e(t)$ - стационарный случайный процесс. Тогда выходная величина $y(t)$ конструктивного элемента, содержащего источник $u(t)$, сама является случайным нестационарным процессом.

Источники таких погрешностей образуют довольно широкий класс, включающий источники с характеристиками

$$g(t) = t^m, m = 1, 2, \dots, m \quad (3.77)$$

или

$$g(t) = e^{0t}, \quad (3.78)$$

а также их линейными комбинациями: $c_r t^m e^{p_r t}$; решение в этих случаях относительно простое.

3.4. Обобщенная модель погрешностей

3.4.1. Модель с непрерывным временем

Математическая модель ИС была представлена на рис. 3.1,б.

Первая часть модели, содержащая так называемое уравнение преобразования, имеет вид (3.8):

$$y = F(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m, T, a_1, \dots, a_k, z). \quad (3.79)$$

Аргументы оператора F являются воздействующими величинами, случайными переменными либо случайными нестационарными процессами, а уравнение преобразования имеет стохастический характер.

Вторая часть модели представляет собой процедуру градуировки (3.5):

$$x^* = \varphi(y) = F_0^{-1}(y), \quad (3.80)$$

где

$$F_0 = F_0(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m, a_{10}, \dots, a_{k0}), \quad (3.81)$$

т. е. является функцией номинальных (постоянных или детерминированных) значений конструктивных параметров, а также измеряемых входных величин.

Погрешность ИС определяется по (3.7) как разность значения измеряемой величины, восстановленной на основе показаний ИС, и собственно измеряемой величины:

$$\Delta = x^* - x, \quad (3.82)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \Delta &= \varphi[F(x_1, \dots, x_{m-1}, x, T, a_1, \dots, a_k, z)] - x = \\ &= F_0^{-1}[F(x_1, \dots, x_{m-1}, x, T, a_1, \dots, a_k, z)] - x. \end{aligned} \quad (3.83)$$

В наилучшем случае, когда $F = F_0$, вычитаемое в формуле погрешности не равно x ввиду различия аргументов операторов F_0 и F : аргументами F_0 служат детерминированные величины, а аргументами F — случайные величины.

Воспользуемся примером. Уравнение преобразования магнитоэлектрического прибора имеет вид:

$$\alpha = \Phi z l \cdot J / D = \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \cdot x / \tilde{a}_4 = \tilde{k} x, \quad (3.84)$$

где $x = I$, $y = \alpha$, $a_1 = \Phi$, $a_2 = z$, $a_3 = l$, $a_4 = D$. Конструктивные параметры могут быть случайными величинами, что обозначено тильдой над буквой.

Процедура градуировки описывается соотношением

$$x^* = \varphi(\alpha) = c\alpha = \alpha/k_0, \quad (3.85)$$

где $c = \text{const}$ (обычно $c = l/k_0$). Отсюда получаем

$$\Delta = x^* - x = (\tilde{k}/k_0)x - x = (\tilde{k}/k_0 - 1)x = (\tilde{k} - k_0)x/k_0 \quad (3.86)$$

Здесь $\tilde{k}/k_0 \neq 1$, так как $\tilde{k}$ — случайная величина. Отметим, что Δ , как и y , является функцией источников погрешностей a_j ($j = 1, \dots, k$), которые представляют собой нестационарные случайные процессы; поэтому Δ , как функция a_j , тоже является нестационарным случайным процессом. Интерпретация свойств конструктивного параметра, представленная на рис. 3.14, учитывает внутреннюю изменяемость a_j , выраженную состав-

ляющей Δ_{jn} , зависящей от времени, а также внешнее влияние условий использования ИС, выраженное влияющими величинами. Следовательно, погрешность Δ представляет собой многомерный случайный процесс, а ее аргументами являются входные величины $x_i \in \langle x_{i,n}, x_{i,g} \rangle$, а также время T эксплуатации ИС, т. е.

$$\{\Delta\} = \{\Delta_k(x_1, \dots, x_m, T)\}. \quad (3.87)$$

Здесь индекс k — порядковый номер реализации процесса. Реализации процесса $\{\Delta\}$ происходят в действительном времени $t \in T_k \in T$. Физический смысл погрешности как случайного процесса состоит в том, что ИС размещается в $m+1$ -мерном случайном поле с координатами $x_1, \dots, x_{m+1}$ (где $x_{m+1} = T$). В зависимости от положения ИС в этом поле получают различные реализации погрешностей. Так, например, если $x_i = x_{io} = \text{const}$, $i=1, \dots, m-1$, $T = \text{const}$, то процесс возникновения погрешности одномерен, $\{\Delta\} = \{\Delta(x)\}$. На рис. 3.15 представлены распределения погрешностей электроизмерительных показывающих приборов — магнитоэлектрического и электромагнитного, причем электромагнитный прибор имеет квадратичную характеристику $y = ax^2$.

Магнитоэлектрический прибор характеризуется нормальным распределением погрешностей с постоянной дисперсией $\sigma^2 = \text{const}$ для данного x , а среднее значение погрешности $E_k \{\Delta_k\} = m(x)$ зависит от значения x , что отмечено на рисунке ломаной линией. Распределение погрешностей электромагнитного прибора характеризуется тем, что среднее значение погрешности $m(x)$ и дисперсия $\sigma^2(x)$ зависят от аргумента x .

Могут существовать как частные случаи ИС с погрешностями, описываемыми стационарными процессами. Так, например, магнитоэлектрический измерительный прибор может иметь пренебрежимо малую систематическую погрешность и случайную погрешность с постоянной дисперсией, что позволяет описать эти свойства стационарным процессом в данных условиях сравнения.

Во многих случаях нестационарный процесс погрешностей $\{\Delta\}$ можно представить с помощью *стационарного процесса* $\{\varepsilon\}$ и функций $h(x_1, \dots, x_m, T)$, $g(x_1, \dots, x_m, T)$ измеряемых аргументов, таких что

$$\{\Delta\} = g(x_1, \dots, x_m, T)\{\varepsilon\} + h(x_1, \dots, x_m, T). \quad (3.88)$$

Случайный процесс $\{\varepsilon\}$ имеет следующие свойства:

$$E\{\varepsilon\} = 0, \quad E\{\varepsilon^2\} = 1, \quad (3.89)$$

$$E[\{\varepsilon_t\} \{\varepsilon_{t+\tau}\}] = E[\{\varepsilon_t\} \{\varepsilon_{t-\tau}\}] = \rho(\tau). \quad (3.90)$$

Из приведенного выше следует, что

$$E_k \{\Delta_k\} = E_k [g(\cdot)\{\varepsilon\} + h(\cdot)] = g(\cdot) E_k \{\varepsilon\} + h(\cdot) = h(x_1, \dots, x_m, T), \quad (3.91)$$

а также

$$\text{var}\{\Delta_k\} = E_k[(\{\Delta_k\} - E_k\{\Delta_k\})^2] = g^2(\cdot) E_k[\{\varepsilon\}^2] = g^2(x_1, \dots, x_m, T), \quad (3.92)$$

если очередные реализации происходят на интервалах времени, больших чем $\tau_{\text{нач}}$, а $\rho(\tau) = 0$ по истечении некоторого времени. Математические ожидания рассчитываются по множеству реализаций.

Без существенных затруднений функцию g , а также h можно определить теоретически или экспериментально. Так, например, в магнитоэлектрическом измерительном приборе неточная балансировка измерительного органа приводит к появлению момента, пропорционального массе этого органа m , ускорению свободного падения g , расстоянию R между центром массы и осью вращения измерительного органа, а также синусам соответствующих углов φ, β (рис. 3.16), а именно:

$$M_G = mgR \sin\beta \sin(\varphi + \varphi_0). \quad (3.93)$$

Уравнение моментов $\sum M_i = 0$ позволяет получить модель измерительного прибора:

$$\alpha = \tilde{k}J - b \sin(\varphi - \varphi_0). \quad (3.94a)$$

Здесь I — сила тока, $\tilde{k}$ — чувствительность, $b = mgR \sin\beta/D = \text{const}$, φ — угловое положение измерительного органа, соответствующее отклонению α . Значения R, φ_0 в данном приборе реализованы случайным образом; при этом $R \in \langle 0, R_{\text{дон}} \rangle$, $\varphi_0 \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Если процедура градуировки имеет вид (3.85)

$$J^* = c \alpha \text{ и } c = 1/k_0,$$

то

$$\Delta = J^* - J = c[\tilde{k}J - b \sin(\varphi + \varphi_0)] - J = [(\tilde{k} - k_0)/k_0]J - (b/k_0)(\varphi + \varphi_0) \quad (3.94б)$$

в интервале $\varphi = \varphi_z = \varphi_s - \varphi_n$, обусловленном диапазоном измерений. Из определений (3.91), (3.92) и уравнения (3.94б) получаем

$$h(x) = -\frac{b}{k_0} \sin(\varphi + \varphi_0) = -\frac{b}{k_0} \sin(k_1 J + \varphi_0), \quad (3.94в)$$

поскольку $\varphi = k_1 J$ в идеальной модели, а также

$$g^2 = \text{var} \left[\frac{\tilde{k} - k_0}{k_0} J \right] = \left(\frac{J}{k_0} \right)^2 \sigma_{\tilde{k}}^2, \quad (3.94г)$$

если $k_0, I = \text{const}$, а $\tilde{k}$ — случайная переменная со средним значением k_0 и дисперсией $\sigma_{\tilde{k}}^2$. Процедуру градуировки (3.85) можно подобрать так (например, $c = c_1 \neq 1/k$), чтобы уменьшить систематическую погрешность.

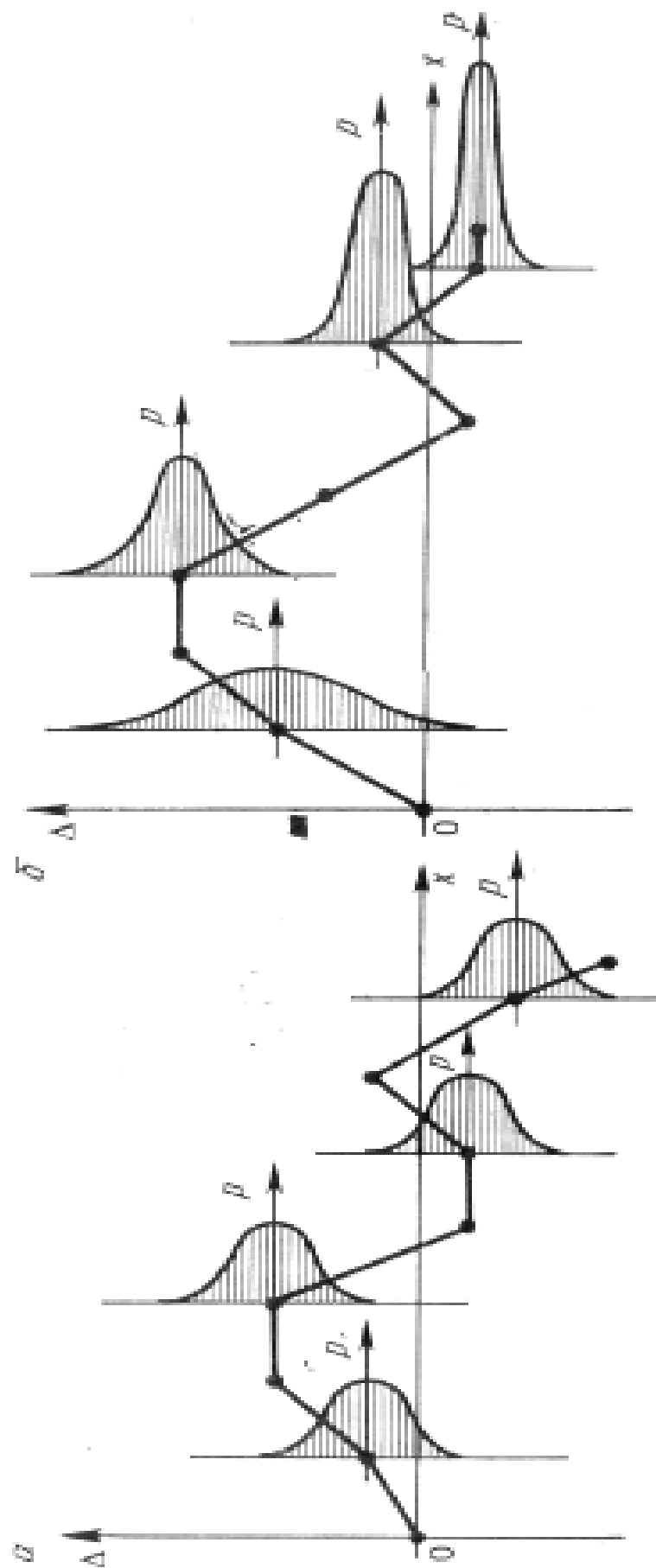


Рис. 3.15. Распределение погрешностей магнитоэлектрического — а и электромагнитного — б показывающих приборов

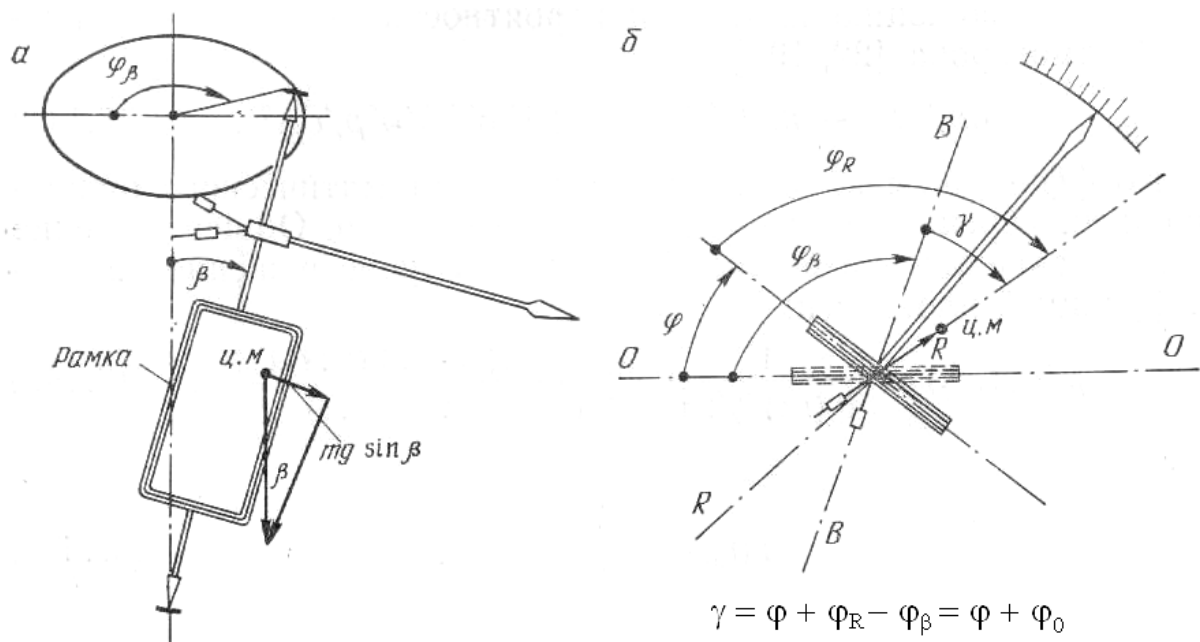


Рис. 3.16. Определение величин, характеризующих момент, обусловленный неточной балансировкой измерительного органа показывающего прибора:

a — конструктивная схема измерительного органа; b — вид с направления оси $0-0$ — нулевое положение измерительного органа; $R-R$ — плоскость, проходящая через ось и центр массы; φ_R — угол положения этой плоскости; $B-B$ — плоскость отклонения измерительного органа от вертикали; φ_β — угол положения этой плоскости; β — угол отклонения измерительного органа от вертикали; $R \sin \gamma$ — плечо силы, вызывающей поворот; $mg \sin \beta$ — составляющая силы тяжести, поворачивающая измерительный орган

В некоторых случаях модель возникновения погрешности можно построить теоретически. Так, источником погрешности в резисторе может быть тепловой шум, описываемый формулой Найквиста (3.52). Тогда $g(\theta)$ попросту равняется $2\sqrt{kR\theta}$ и зависит от температуры θ резистора. Дiodный шум имеет дисперсию $\sigma_u^2 = 3000 \text{ мкВ}^2$.

Экспериментально определить функции g и h сложнее. Во-первых, для определения g хотя бы в одной точке необходимо такое количество реализаций, чтобы смещение оценки дисперсии было пренебрежимо мало. Пусть это будет число n . То свойство ИС, что $g = \text{const}$, существенно уменьшает необходимое количество измерений. Во-вторых, реализация каждого из аргументов в q точках дает необходимое количество точек:

$$N = (m + 1)^q. \quad (3.95)$$

Соответствующий подбор точек влияет на стоимость исследований. Для некоторых измерений, например физико-химических, приходится использовать расходуемые образцы; измерения при переменных температурах требуют много времени. Поэтому необходимы упрощения.

3.4.2. Модель с дискретным временем

Примем для начала, что величина $x_1, \dots, x_m$ стабильна; это делает процесс возникновения погрешностей одномерным процессом с временем в качестве аргумента. При экспериментальном определении функций $g(T)$ и $h(T)$ обобщенная модель может иметь вид:

$$Z_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i Z_{t-i} + \sum_{j=0}^q \gamma_j t^j + e_t. \quad (3.96)$$

Здесь φ_i, γ_j — постоянные коэффициенты модели, t — время, индекс t нумерует дискретные моменты времени, кратные некоторому постоянному периоду времени ΔT , $t \in \langle 1, N \rangle$, i, j — текущие индексы, Z_{t-i} — сокращенная запись значения переменной (погрешности Δ) в момент $t - i\Delta T$, т. е. $Z_{t-i} = Z(t - i\Delta T)$, e_t — стационарный случайный процесс, описываемый уравнением $e_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_r a_{t-r}$, где a_t — белый шум со средним значением, равным нулю, и с постоянной дисперсией σ_a^2 .

Переменная Z_t имеет две составляющие: случайную Z_t' и детерминированную — Z_t'' , при этом

$$Z_t = Z_t' + Z_t'', \quad (3.97)$$

$$Z_t' = \sum_{i=1}^p \varphi_i Z_{t-i} + e_t \quad (3.98a)$$

и

$$Z_t'' = \sum_{j=0}^q \gamma_j t^j. \quad (3.98b)$$

Случайная составляющая Z_t' соответствует модели случайной погрешности, свойства которой выражает $g\{\varepsilon\}$, а систематическую погрешность, описываемую функцией h , характеризует переменная Z_t'' .

На основе экспериментальных данных Z_t в интервале времени $\langle 1, N \rangle$ можно определить коэффициенты φ_i, γ_i . Для демонстрации некоторых особенностей модели рассмотрим разностное уравнение, отвечающее случаю $p = 1$ (а также $r = 1$), т. е.

$$Z_t' = \varphi_1 Z_{t-1}' + a_t - \theta_1 a_{t-1}. \quad (3.99)$$

Процесс Z_t' стационарен при условиях

$$-1 < \varphi_1 < 1, -1 < \theta_1 < 1. \quad (3.100)$$

После умножения уравнения (3.99) на Z_t' и вычисления среднего значения имеем

$$\sigma_z^2 = \varphi_1 K_z(1) + K_{za}(-1). \quad (3.101)$$

Умножив (3.99) последовательно на Z_{t-1}' , a_t , a_{t-1} и, вычислив средние значения, получим систему уравнений, которая дает

$$\sigma_z^2 = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\varphi_1\theta_1}{1 - \varphi_1^2} \sigma_a^2 = K_z(0), \quad (3.102a)$$

$$\rho_1 = K_z(1)/K_z(0) = (1 - \varphi_1\theta_1)(\varphi_1 - \theta_1)/(1 + \theta_1^2 - 2\varphi_1\theta_1), \quad (3.102b)$$

$$\rho_2 = K_z(2)/K_z(0) = \varphi_1 \rho_1. \quad (3.102b)$$

Коэффициенты корреляции можно рассчитать непосредственно по значениям Z_t' для $t = 1, \dots, N$. В зависимости от значений коэффициентов дифференциального уравнения коэффициент корреляции уменьшается аperiodически либо осцилляторно до нуля по мере увеличения временного сдвига, как показано на рис. 3.17¹.

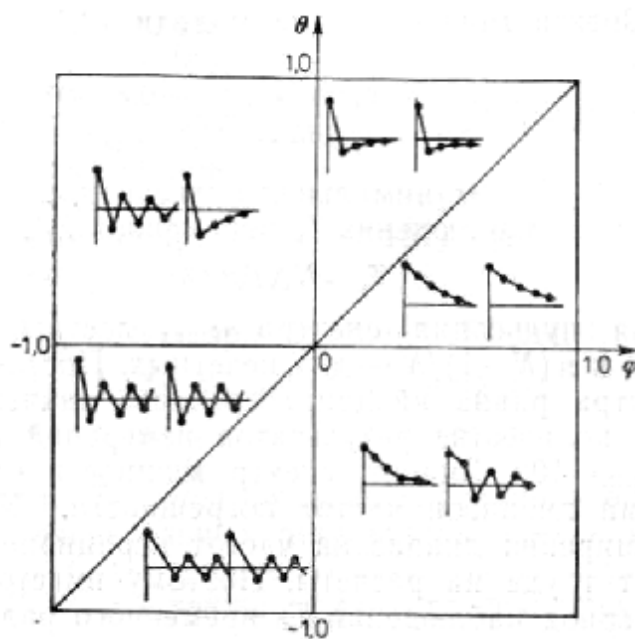


Рис. 3.17. Характер корреляционной функции временного ряда в зависимости от значений коэффициентов модели

¹ Для непрерывных нестационарных процессов моделью функции корреляции обычно служит функция, подобная показанным на рис. 3.17.

Итог

Вышеприведенную модель свойств погрешности можно трактовать следующим образом. Существует случайная составляющая погрешности, характеризующаяся коррелированным во времени случайным стационарным процессом в период наблюдения T_0 . При этом для $t > t_{нач}$ коэффициент корреляции имеет нулевое значение. Кроме того, существует детерминированная составляющая, описываемая функциями $g(T)$, $h(T)$. В шкале времени эксплуатации T случайная составляющая погрешности может истолковываться как белый шум. В шкале времени измерений t необходимо учитывать корреляцию случайной составляющей (цветной шум) и изменение среднего значения погрешности $h(T)$, а также дисперсии $g(T)$. Шкала времени определяется двояко — координатой t , а также координатой T , причем $t \in T$.

Характеристики трехмерных (и более) нестационарных процессов можно определить теми же понятиями по определениям (3.88) — (3.90), соответственно увеличивая число экспериментов либо упрощая модель (3.88), например, принимая $g = \text{const}$.

3.5. Идентификация модели измерительной системы

Математическая модель ИС может быть сформулирована аналитически (т. е. выведенная из законов физики и химии так называемая физическая или физико-химическая модель) либо экспериментально; в последнем случае ИС рассматривается как черный ящик — это так называемая статистическая модель.

Точность физической модели могут определять:

- а) независимые переменные, то есть аргументы функции $F(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m, T, a_1, \dots, a_k, z)$;
- б) коэффициенты $b_i = \psi_i(a_1, \dots, a_k)$ функции F , вид которой задан;
- в) значения коэффициентов.

Пункт (в) практически исключает задачу формулирования модели; в этом случае модель может быть подвергнута лишь проверке с точки зрения каких-либо специальных требований, но это не является проблемой идентификации.

Идентификация математических моделей — это обширное поле деятельности теории управления. Знание физических явлений и свойств элементов перед их применением для построения ИС играет в метрологии значительно более важную роль; поэтому ряд методов идентификации, присущих пункту (а), здесь не применяется. И цель идентификации, и требуемая высокая точность ее обусловили то, что для метрологии в целом характерны специфичные подходы, и из общих методов для нее приемлемы лишь некоторые. Так, использование статистического метода пла-

нирования эксперимента весьма незначительно. Во многих случаях требования точности при идентификации модели для нужд метрологии соответствуют специальным исследованиям в области физики. Примером могут служить исследования эффекта Джозефсона с целью использования этого явления для определения эталона напряжения.

3.5.1. Определение независимых переменных модели

Этот этап отсутствует при определении характеристик, о чем говорилось выше, но он появляется при исследовании источников погрешностей в процессе разработки аппаратуры. Если невозможно построить физическую модель, то нужно применить экспериментальные методы. Сначала выдвигается гипотеза, что данный конструктивный параметр (данное явление, величина и т. п.) является источником погрешности, а затем проводится направленный эксперимент, результаты которого подтверждают либо отвергают принятую гипотезу.

Для крупных объектов (в науке, промышленности, экономике) эксперимент очень дорог либо вообще невозможен; тогда используются различные эвристические методы, ограничивающие диапазон эксперимента, например дельфийский метод, метод образцов и т. д.

Общая черта этих методов — эвристический подход, причем для объективизации результатов используются различные формальные процедуры, уменьшающие вероятность получения ошибочной оценки. Однако эти процедуры дают все же не объективный результат, а лишь лучшим образом выбранное направление дальнейших поисков.

3.5.2. Корреляционный анализ

Для исследования взаимосвязей между случайными переменными используется *функция взаимной корреляции*. Нормированная функция взаимной корреляции переменных U и V , реализация которых во времени непрерывна, $u(t)$, $v(t)$, $t \in T$, описывается выражением

$$\rho_{uv}(t_1, t_2) = R_{uv}(t_1, t_2) / \sqrt{K_u(t_1, t_2) K_v(t_1, t_2)}, \quad (3.103)$$

где

$$R_{uv} = E\{[U(t_1) - E[U(t_1)]] [V(t_2) - E[V(t_2)]]\} \quad (3.104)$$

— функция взаимной корреляции, а

$$K_u(t_1, t_2) = E\{[U(t_1) - E[U(t_1)]] [U(t_2) - E[U(t_2)]]\} \quad (3.105)$$

и соответственно $K_v(t_1, t_2)$ — функции корреляции переменных U , V . Для случайных переменных, стационарных в узком смысле, функция корреляции зависит только от интервала между аргументами t_1, t_2 , т. е. от $\tau = t_2 - t_1$, следовательно,

$$\rho_{uv}(t_1, t_2) = \rho_{uv}(\tau) = R_{uv}(\tau) / \sqrt{K_u(\tau) K_v(\tau)}. \quad (3.106)$$

Нормированная функция взаимной корреляции принимает значения от -1 до $+1$. Если переменные независимы, то для них $\rho_{uv}(\tau) = 0$. Однако в общем случае свойство $\rho_{uv}(\tau) = 0$ означает, что между переменными U , V нет корреляции (это не равнозначно их независимости). Лишь для нормальных распределений отсутствие корреляции означает независимость случайных переменных. Значение $\rho = \pm 1$ указывает на то, что между переменными существует линейная связь, а именно:

$$\text{если } \rho_{uv}(0) = 1, \text{ то } U = kV + a, \quad (3.107a)$$

$$\text{если } \rho_{uv}(\tau_1) = 1, \text{ то } U(t + \tau_1) = kV(t) + a, \quad (3.107b)$$

где $k, a = \text{const}$. Если $\rho = 1$, то $k > 0$; $\rho = -1$ означает, что $k < 0$.

Значение нормированной корреляционной функции указывает на степень и характер зависимости; пусть, например,

$$V = U + Z, \quad (3.108)$$

где Z — независимая случайная переменная со свойствами белого шума, $E(Z) = 0$, $E(Z-Z)^2 = \sigma_z^2$; тогда после подстановки (3.108) в формулу (3.104) получаем выражение

$$R_{uv}(\tau) = K_u(\tau) + K_{uz}(\tau) = K_u(\tau) \quad (3.109)$$

и соответственно выражение для коэффициента корреляции

$$\rho_{uv}^2(\tau) = [K_u(\tau)^2 / \sigma_u^2 \sigma_u^2] = \rho_u^2(\tau) \sigma_u^2 / (\sigma_u^2 + \sigma_z^2) \quad (3.110)$$

Чем больше доля случайной составляющей в зависимости $V = f(U)$, характеризующей случайной переменной Z , тем коэффициент корреляции меньше 1. Мерой пропорции здесь является отношение дисперсий. Если случайная составляющая значительно превышает изменения переменной U , то $\rho_{uv}^2 \approx \sigma_u^2 / \sigma_z^2$, т. е. коэффициент корреляции уменьшается до нуля.

Зная распределение, можно вычислить доверительный интервал коэффициента R , вычисленного по результатам пробных измерений. Однако удобнее использовать распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы, которое получается после замены переменной R на t :

$$t = (R / \sqrt{1 - R^2}) \sqrt{n - 2}. \quad (3.111)$$

По таблицам этого распределения можно оценить, как число элементов пробного измерения (при $\rho = 0$) влияет на доверительный уровень значения R , вычисленного из пробы. Если результат определения $R(n)$ приходится на область $p < 0,5$, то предположение, что $\rho = 0$, более вероятно, чем противоположное. Чтобы результат определения R из эксперимента был достаточно надежным в статистическом смысле, количество измерений должно быть достаточно большим.

3.5.3. Регрессионный анализ

Метод регрессии позволяет построить количественную модель на основе экспериментальных исследований. Данные для построения модели в случае двух переменных имеют форму соответствующих им множеств переменных X и Y , а именно $\{X, Y\}$, элементами которых являются (x_j, y_j) при $j = 1, \dots, k$. Обычно из теоретического анализа известно, какая из переменных независима (входная величина), а какая зависима (выходная). Применительно к модели ИС об этом говорят сами обозначения X, Y .

Регрессионной моделью называется связь между условным значением математического ожидания зависимой переменной и независимой переменной, а именно:

$$y = E[y_j | x_j] = m_y(x) . \quad (3.112)$$

Это регрессия переменной Y относительно переменной X , т. е. регрессия первого рода.

Определение условного математического ожидания $y = m(x)$ может производиться последовательно для каждой точки, если значения x_j ($j=1, \dots, k$) многократно реализованы. На основании оценок $m_y(x_j)$ для каж-

дой точки получается множество точек $[x_j, \hat{m}_y(x_j)]$, а не функциональная зависимость. В определенных случаях за точку x_j можно принимать не-большой интервал и вычислять в этом интервале среднее значение (это так называемая задача точечной оценки). Для отдельных точек зависимо-

сти $\hat{y}_j = m_y(x_j)$ можно также определить доверительные интервалы и погрешности оценки. Функциональную зависимость можно установить в том случае, когда существуют данные теоретического характера, например двумерное распределение вероятностей $p(x, y)$, но тогда экспериментальные данные излишни.

Задача определения модели *регрессионным методом*, так называемой регрессии второго рода, формулируется несколько иначе. Исходными данными при этом служат результаты экспериментов (x_j, y_j) , $j=1, \dots, k$, и отыскивается модель линейного вида — так называемая линейная регрессия, например

$$y = x\beta + \alpha + \varepsilon, \quad (3.113)$$

либо нелинейного вида — нелинейная регрессия, например

$$y = f(x) + \varepsilon, \quad (3.114)$$

$$f(x) = W_q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_q x^q. \quad (3.115)$$

Считается, что модель известна с точностью до коэффициентов, а также до случайной составляющей ε , охватывающей все погрешности модели. Принимается, что $E(\varepsilon) = 0$.

Определенная таким образом модель должна удовлетворять условию

$$\sum_{j=1}^k [y_j - (x_j\beta + \alpha)]^2 = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j^2 = \min_{\alpha, \beta}, \quad (3.116)$$

которое и дало название *метод наименьших квадратов* (МНК). Требования минимального удаления точек от кривой регрессии соответствуют оценки $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q$ коэффициентов модели α, β либо общей модели (3.115). Способ построения модели будет проиллюстрирован на примерах; систематизированное изложение метода можно найти в справочниках по математической статистике.

Пример регрессионного метода. Идентифицируется модель ИС для измерения содержания углерода в ванне кислородного конвертера для выплавки стали.

Содержание углерода X как измеряемая координата состояния объекта определяется путем измерения скорости обезуглероживания Y (поточков углерода, отводимых в виде газообразных продуктов сгорания) и нахождения по ней величины X . Полученные экспериментально зависимости представлены на рис. 3.18. Каждая из кривых представляет собой характеристику одной плавки, а данные, соответствующие одной кривой, сильно скоррелированы. В качестве независимых результатов можно принимать лишь точки, относящиеся к разным плавкам. Результаты измерений модели ИС могут быть представлены так, как это показано на рис. 3.19, а, б. В первом случае значения независимой переменной одинаковы, во втором - разные. Используя метод регрессии первого рода, получают точечные оценки регрессии, как это показано на рис. 3.19, в. Если значения независимой переменной различны (как на рис. 3.19, б), то область X делится на интервалы и отыскиваются точечные оценки, как это показано на рис. 3.19, г, для центрального значения интервала либо для средней точки в интервале. При идентификации модели ИС для измерения содержания углерода в ванне конвертера получены точечные оценки регрессии первого рода, показанные на рис. 3.20.

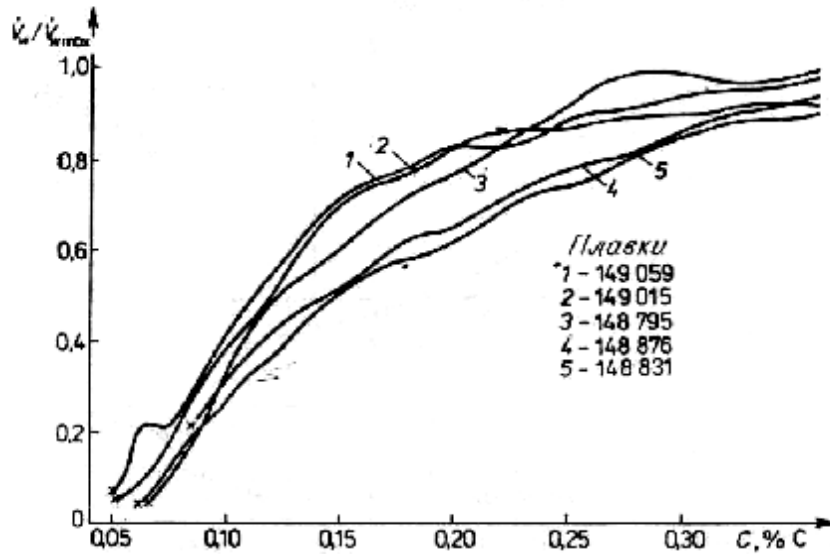


Рис. 3.18. Экспериментальные характеристики конвертерной выплавки стали.
 C — содержание углерода в ванне; V_{ω} — скорость обезуглероживания

$$y_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij} \Big|_{x=x_j}, \quad (3.117)$$

Результат не определяет функцию. В тех же самых точках независимой переменной можно определить доверительный интервал оценки на основе пробного эксперимента. Оценка дисперсии составляет

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - y_j)^2, \quad (3.118)$$

а доверительный интервал при заданном доверительном уровне равен

$$\Delta_{пред,j} = \pm t_j \hat{\sigma}_j. \quad (3.119)$$

Значение t зависит от распределения y_j . Методом регрессии первого рода нельзя получить модель ИС в аналитической форме. Кроме того, доверительный интервал определяется по точкам, и для получения достаточной точности каждого значения x_j число измерений n_j должно быть значительным. В многомерных моделях число измерений растет в пропорции $n_j n_i^N$, где n_j — число повторений в данной точке x_j , n_i — число точек в области каждой из независимых переменных, N — число независимых переменных ($N+1$ — размерность модели).

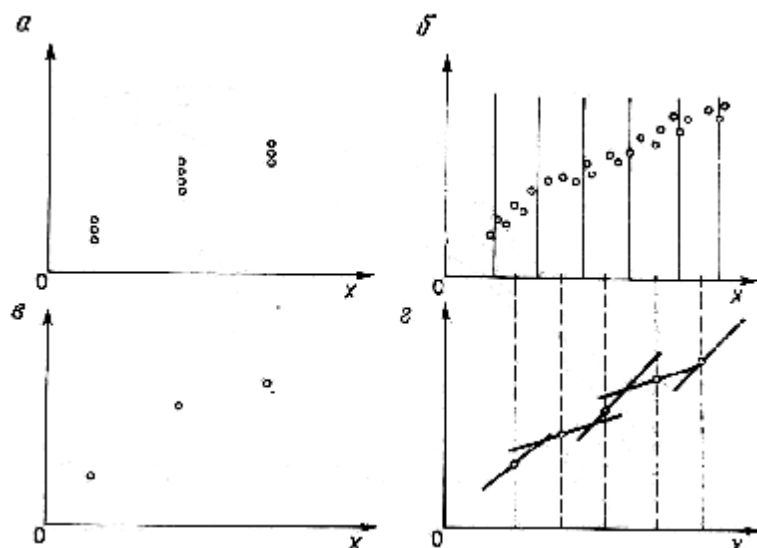


Рис. 3.19. Подбор точек измерения в методе регрессии первого рода

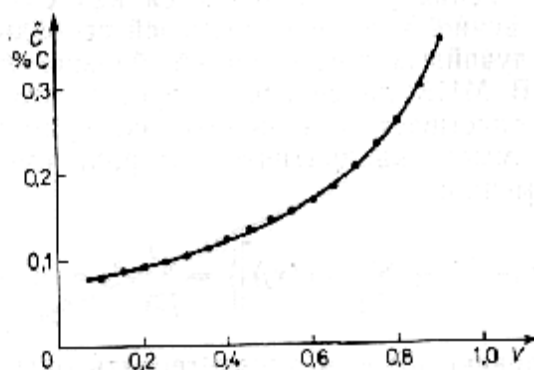


Рис. 3.20. Результаты регрессии первого рода характеристики системы для измерения содержания углерода в ванне конвертера. $V = V_{\omega} / V_{\omega \max}$, V_{ω} - скорость обезуглероживания; C - оценка содержания углерода в ванне

При малом числе точек получается низкая точность и вследствие этого — малая пригодность модели. Аналогичную форму модели удастся получить по результатам анализа регрессии первого рода при использовании аппроксимации точек произвольным методом к произвольно выбранной функциональной зависимости. Так, для данных, представленных на рис. 3.19, в локальных пределах можно аппроксимировать результаты линейными зависимостями. Результат такой аппроксимации показан на рис. 3.19, г.

Из методов регрессии второго рода чаще всего используется метод наименьших квадратов, который имеет то свойство, что вычисленные оценки коэффициентов модели не смещены (не отягощены систематической погрешностью) и наиболее эффективны. В МНК постулируется форма модели

$$y = b_0 + \sum_{k=1}^q b_k f_k(x) + \varepsilon, \quad (3.120)$$

где $b_0, b_1, \dots, b_q$ - коэффициенты модели; $f_1(x), \dots, f_k(x)$ - произвольные однозначные функции аргумента x априори известного вида (здесь предполагается, что модель известна с точностью до коэффициентов); ε — случайный процесс, который моделируется стохастической (а не функциональной) зависимостью Y от X , описываемой моделью (3.120); реализации ε_j неизвестны, но имеют одинаковую дисперсию $\sigma_\varepsilon^2 = \text{const}^1$ и не коррелированы.

Линейная относительно коэффициентов форма модели соответствует линейной регрессии. Большое значение имеет предположение об известной до коэффициентов форме модели; при этом все отклонения рассматриваются как случайные погрешности. Существенно, что число степеней свободы, используемое для оценки случайных погрешностей, больше числа случайных переменных. В МНК далее постулируется, что модель (3.120) лучше всего описывает результаты экспериментов, когда погрешности в смысле квадратичной метрики имеют наименьшее значение, а именно:

$$\sum_{j=1}^{n_j} \left\{ y_j - \left[b_0 + \sum b_k f_k(x_j) \right] \right\}^2 = \sum_{j=1}^{n_j} \varepsilon_j^2 = \min_{b_0, b_1, \dots, b_q}. \quad (3.121)$$

Этому условию должны удовлетворять оценки коэффициентов модели, т. е. $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q$.

Возвращаясь к примеру ИС для измерения содержания углерода, отметим, что полученная там функциональная зависимость, которая проведена через точки, определенные в результате анализа регрессии первого рода, является нелинейной. На основе теоретического анализа постулируется модель

$$Y = 1 - \exp[-k(X-p)], \quad (3.122)$$

в которой $k, p = \text{const}$ — коэффициенты. Данные рис. 3.18 подтверждают эту зависимость. Для получения зависимости, линейной относительно коэффициентов, преобразуем модель (3.122) путем подстановки

$$U = -\ln(1 - Y).$$

Тогда получается

$$U = b_0 + b_1 X + v$$

либо

$$X^* = a_0 + a_1 U + \varepsilon, \quad (3.123)$$

если характеристика φ (3.5) определяется как обратная функция модели f (3.10). Выше обозначено

$$b_0 = -kp, b_1 = k,$$

$$a_0 = p, a_1 = 1/k.$$

В результате получаются значения

$$\hat{a}_0 = 0,0670, \hat{a}_1 = 0,1127 \text{ для } X \in \langle 0,08, 0,17 \rangle; \quad (3.124a)$$

¹ МНК можно использовать и без условия $\sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$, но получаемые при этом оценки будут менее эффективны (об этом см. ниже).

$$\hat{a}_0 = 0,0487, \hat{a}_1 = 0,1317 \text{ для } X \in \langle 0,17, 0,35 \rangle. \quad (3.124б)$$

С целью проверки допущений исследована дисперсия погрешности ε для результатов анализа регрессии первого рода. Результат, показанный на рис. 3.21, свидетельствует о том, что полученные оценки коэффициентов модели не самые эффективные. Чтобы получить более эффективные оценки, необходимо преобразовать модель в форму, в которой дисперсия случайной составляющей ε будет постоянна. Если в диапазоне измерений $\langle x_n, x_6 \rangle$ дисперсия ε изменяется согласно зависимости

$$\sigma^2 = g^2(x)\sigma^2_0, \sigma^2_0 = const, \quad (3.125)$$

причем

$$\frac{1}{x_6 - x_n} \int_{x_n}^{x_6} g(x) dx = 1, \quad (3.126)$$

то после подстановки

$$v = y/g(x), \varphi_k(x) = f_k(x)/g(x), \quad (3.127а, б)$$

$$\varphi_0 = 1/g(x), \varepsilon_0 = \varepsilon/g(x) \quad (3.128а, б)$$

вместо уравнения (3.120) получаем

$$v = \sum_{k=0}^q a_k \varphi_k(x) + \varepsilon_0. \quad (3.129)$$

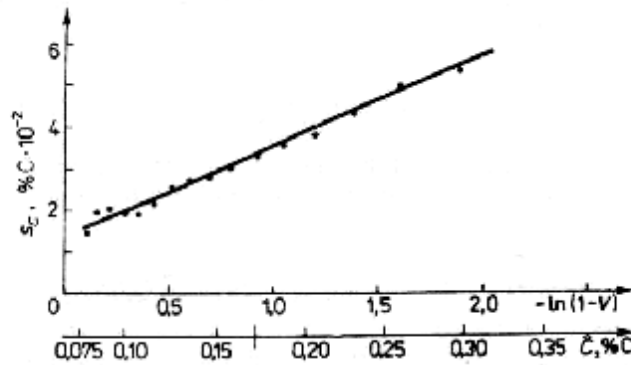


Рис. 3.21. Зависимость стандартного отклонения погрешности содержания углерода от измеряемой величины

Тогда условие $\sum_{j=1}^{n_j} \varepsilon^2_{0j} = \min$ в точках оценки регрессии первого рода записывается так:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_j} \left\{ \left(y_j - \left[b_0 + \sum_{k=1}^q b_k f_k(x_j) \right] \right) / g(x_j) \right\}^2 = \\ & = \sum_{j=1}^{n_j} \left\{ y_j - \left[b_0 + \sum_{k=1}^q b_k f_k(x_j) \right] \right\}^2 \omega_j = \sum_{j=1}^{n_j} \omega_j \varepsilon^2_j = \sum_{j=1}^{n_j} \varepsilon^2_{0j} = \min, \end{aligned} \quad (3.130)$$

где

$$\omega_j = 1/g^2(x_j) \quad (3.131)$$

называется весом (весовым коэффициентом) данной точки.

Выражение (3.130) является условием метода взвешенных наименьших квадратов — сокращенно МВНК. Оценки коэффициентов модели ИС для измерения содержания углерода в ванне конвертера, полученные по МВНК, имеют другие значения в сравнении с результатами метода регрессии первого рода (3.124), а именно:

$$\hat{a}_0 = 0,0660, \hat{a}_1 = 0,1109 \text{ для } X \in \langle 0,08, 0,17 \rangle; \quad (3.132a)$$

$$\hat{a}_0 = 0,0542, \hat{a}_1 = 0,1303 \text{ для } X \in \langle 0,07, 0,35 \rangle. \quad (3.132б)$$

При использовании регрессионного анализа необходима оценка того, является ли вычисленная функция регрессии адекватной результатам измерений. Кроме того, нужно определить доверительный интервал функции регрессии.

3.5.4. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК) был сформулирован Лежандром и Гауссом раньше, чем метод регрессии. Он применяется как независимый метод аппроксимации результатов экспериментальных исследований для произвольно принятой модели. В частности, модель можно искать методом проб. Наилучшей признается та модель, для которой сумма квадратов погрешностей наименьшая. Для этого используются, в частности, такие итерационные процедуры, которые позволяют не изменять вычисленные ранее коэффициенты при смене модели. Чаще всего модели строят, используя многочлены и ортогональные ряды: полиномы Лежандра, Чебышева, функции Лагерра, Чебышева, Эрмита, Уэлша, Хаара.

Так, например, для результатов измерения скорости обезуглероживания в функции времени отыскивалась возможность аппроксимации их многочленом Грама в виде

$$p_j(s, 2n) = \sum_{k=0}^j (-1)^{k+1} \frac{(j+k)^{2k} (n+s)^k}{2(k!)^2 n^k}. \quad (3.133)$$

Здесь n — нормированные значения независимой переменной для равноудаленных точек $-n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n$; s — текущая переменная, $s = [(x - x_0)/d] - n$; x_0 — начальная точка независимой переменной; $d = \text{const}$ — шаг пробных измерений; j — степень многочлена. Моделью служит многочлен

$$y_q(s) = \sum_{j=0}^q b_j p_j(s, 2n). \quad (3.134)$$

Результатом идентификации и подгонки является следующий ряд моделей с погрешностями M :

$$\begin{aligned}
b_0 &= 3,4710 \cdot 10^{-3}, & M_0 &= 3,3399 \cdot 10^{-8} \\
b_1 &= -2,7952 \cdot 10^{-4}, & M_1 &= 1,6241 \cdot 10^{-9} \\
b_2 &= 2,9040 \cdot 10^{-5}, & M_2 &= 1,4443 \cdot 10^{-9} \\
b_3 &= -1,8534 \cdot 10^{-5}, & M_3 &= 1,4256 \cdot 10^{-9} \\
b_4 &= -3,7595 \cdot 10^{-5}, & M_4 &= 6,5602 \cdot 10^{-10} \\
b_5 &= 7,4549 \cdot 10^{-7}, & M_5 &= 7,2828 \cdot 10^{-10}.
\end{aligned}$$

Погрешность вычислялась по формуле

$$M_j = \frac{1}{2n - q} \sum_{s=-n}^n \left[y_s - \sum_{j=0}^q b_j p_j(s, 2n) \right]^2. \quad (3.135)$$

Наилучшее приближение дает многочлен четвертой степени. Идея МНК изложена в предыдущем разделе.

МНК и МВНК, как и другие статистические методы, не позволяют вскрыть систематические погрешности. Если погрешности имеют нормальное распределение, то, исследуя сумму квадратов M (3.135), можно выявить, выполняются ли принятые допущения.

3.5.5. Другие методы

Применение вычислительных машин для расчетов стимулировало разработку множества методов идентификации. Их общий принцип обычно состоит в определении таких значений коэффициентов, которые удовлетворяют критерию оптимальности.

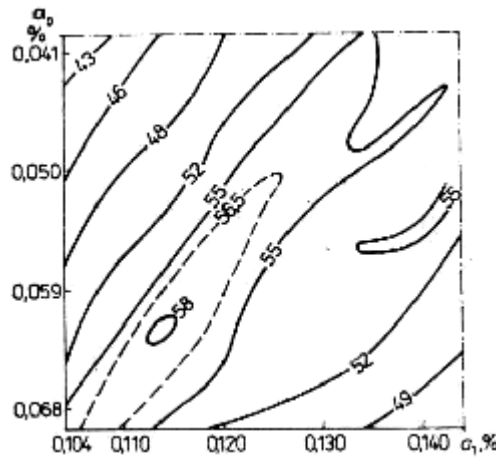


Рис. 3.22. Результаты исследований модели системы для измерения содержания углерода. a_1, a_0 — параметры модели (3.123)

Так, например, для погрешностей можно сформулировать следующие требования:

$$\begin{aligned} \text{если } |\varepsilon| \leq \delta, \text{ то } F(\varepsilon) &= 1, \\ \text{если } |\varepsilon| > \delta, \text{ то } F(\varepsilon) &= 0, \end{aligned} \quad (3.136)$$

а также

$$M = \sum_{j=1}^N F(\varepsilon_j) = \max_A. \quad (3.137)$$

Погрешность ε определяется как в МНК, а именно:

$$\varepsilon = y - f(x), \quad (3.138)$$

где x, y — реализации, $j = 1, \dots, N$.

Функцию f и коэффициенты можно подбирать произвольно, а построенная модель будет наилучшей в смысле критерия (3.137) среди исследованных моделей. Критерий (3.137) труден для аналитических расчетов, зато относительно прост для расчетов на ЭВМ. В примере ИС для измерения скорости обезуглероживания исследована линейная модель (3.123) при использовании критерия (3.137). Результаты исследований представлены на рис. 3.22. В принципе для определения значений коэффициентов при идентификации модели используют метод пробных измерений, отыскания области Монте-Карло, меток планирования эксперимента либо поиска оптимума. Достоинством этих методов является возможность применения стандартных машинных программ. К наиболее известным относится метод стохастической аппроксимации, в котором минимизируется математическое ожидание квадрата погрешностей:

$$E\{[y - f(x)]^2\} = \min_A. \quad (3.139)$$

Достоинствами этого метода являются рекуррентная форма алгоритма и малый объем вычислений.

Контрольные вопросы к разделу 3

1. Какого типа бывают элементы измерительных систем? По какому признаку они различаются?
2. Каковы отличительные особенности моделирования в метрологии?
3. Какие задачи моделирования вы знаете?
4. Какие преобразования происходят в измерительной системе?
5. Какие факторы учитываются при моделировании измерительной системы?
6. В чем заключается процедура градуировки? Каково ее назначение?
7. По каким признакам классифицируют модели характеристик измерительных систем?
8. Что такое статическая модель?
9. Какие способы линеаризации нелинейных характеристик измерительных систем вы знаете?

10. Чем динамическая модель отличается от статической?
11. Каково назначение модулятора амплитуды?
12. Опишите принцип действия модулятора частоты.
13. Какие отличительные особенности имеют модели с дискретным временем?
14. Для чего в цифровом вольтметре с двойным интегрированием применяется второе интегрирование?
15. Какого рода факторы учитывают при моделировании источников погрешностей?
16. Чем явления молекулярного характера отличаются от процессов старения и износа в плане их влияния на погрешность измерительных систем?
17. Какие этапы моделирования нелинейных элементов измерительных систем вы знаете?
18. Перечислите виды нестационарных источников погрешностей.
19. В чем отличие нестационарного элемента и нестационарного источника погрешностей?
20. Что такое дисперсия погрешности?
21. Чем отличаются распределения погрешностей магнитоэлектрического и электромагнитного приборов?
22. Какие параметры модели определяются при корреляционном анализе?
23. Чем отличается регрессия первого рода от регрессии второго рода?
24. В чем заключается метод наименьших квадратов?
25. Каковы отличительные особенности метода средневзвешенных наименьших квадратов?
26. Является ли метод наименьших квадратов регрессионным методом? Это одно и то же?
27. В чем отличительные особенности численных методов моделирования? В каких случаях применение таких моделей выгодно?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теория измерений для инженеров / Я. Пиотровский. М.: Машиностроение, 1989
2. Основы теории статических измерений / Э.И. Цветков. М.: Машиностроение, 1986.
3. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий. М.: Машиностроение, 1985.
4. Модели в науке и технике /Я.Г. Науймин. Л.: Наука, 1984.
5. Теоретические основы информационно-измерительной техники / П.П. Орнатский. М.: Издательство Стандартов, 1985.
6. Моделирование операций контроля и управления точностью / М.И. Коченов. М.: Машиностроение, 1984.
7. Основы теории и расчета информационно-измерительных систем / М.И. Коченов. М.: Машиностроение, 1980.

Учебное издание

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Автор-составитель Бирюков Дмитрий Юрьевич

Редактор Н.П.Кубыщенко

Верстка Д.Ю.Бирюкова

ИД №06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать	30.06.2006	Формат 60х84 1/16
Бумага типографская	Офсетная печать	Усл.печ.л. 5,81
Уч.-изд.л. 5,8	Тираж 50 экз.	Заказ Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ,
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19